Analytische

Abhandlung

der

Anfangsgründe der Mathematik,

auf hohen Befehl

des

Kais. Kön. wirklichen geheimen Raths, Kommandeur des militarischen Maria Theresia Ordens, Generaldirektors des Genie- und Fortifikationswesens, Generalfeldzeugmeisters, Kommandantens des k. k. Ingeniers- Mineurs- und Sappeurskorps, auch bestellten Obristen über ein Regiment zu Fuß

Herrn Karl Klement

Grafen von Pellegrini

Excellenz

zum Gebrauche

der kaiserl. königl. Ingenieursakademie,

verfasset

von Matthias Hauser,

Kapitainlieutenant des kaiserl. königl. Ingenieurskorps.

Zweyter Theil.

Verlegts die kaiserl. königl. Ingenieursakademie.

Wien,

gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern, kaiserl. königl. Hofbuchdrucker und Buchhändler.

1780.

Non fumum ex fulgore, ſed ex fumo dare lucem.

Horat.



Vorrede.

Um die Zöglinge in die Lage zu versetzen, damit sie bei ihrem aus was immer für Ursachen erfolgen mögenden früheren Austritt aus der 2ten Klasse, dennoch ein Ganzes in Bezug auf die ihnen nöthigen militärischen Kenntnisse besitzen mögen, hat man die Geometrie bis nach der Aufnahm, welche bei der vorigen Auflage erst in dem 2ten Theile der analytischen Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik vorgetragen ward, dermalen gleich mit dem 1ten Theile vereinbaret, und dagegen dort die Progressionen, nebst den Logarithmen hinweggelassen, die nun in diesem 2ten Theile vor der Trigonometrie abgehandelt werden.

Diese getrofene Abänderung gewähret noch den Vortheil, daß der Zögling nach innerhalb eines Jahres zurückgelegten 2ten Klasse gleich zur Erlernung der einem Infanterie Officier nöthigen militärischen Wissenschaften übergehen kann.

Es ergiebt sich hieraus von selbst, daß man deswegen auf die Praktik das vorzügliche Augenmerk richten müsse.

Diese wird theils auf dem Lehrstuhle, theils auf dem Felde gegeben. Dort werden alle Methoden, nach welchen man in der Ausübung mit jedem Instrumente verfahren kann, aus der Theorie hergeleitet: nach ihrer Zuverlässigkeit, und Leichtigkeit wird eine der andern untergeordnet, und nach den Absichten einer jeden Unternehmung bald diese, bald jene vorgezogen. Eben da werden die Instrumente untersucht, ihre Wahl wird durch den Endzweck, wozu sie dienen sollen, bestimmt, und die einfachste, und zuverlässigste Berichtigungsmethode für ein jedes festgesetzet.

Um gerade zum Ziel zu gehen wird jeder besondern Lehre ihre Anwendung beigefüget, und der Schüler Schritt für Schritt zugleich in der Praktik weiter geführet. Diese reizet oft den Schüler, der bei jener unempfindlich bleibt, und keiner wünscht erst nach einem Jahre zu erfahren, warum er sich itzt mit diesem, oder jenem beschäftigen soll.

Der

Der Jüngling verlieret bald die Bilder nie gesehener Gegenstände, welche er sich selbst blos nach dem Vortrage nie so deutlich macht, als der Lehrer wünschet. Daher wird die Jugend nach jeder besonderen Anwendung auf das Feld geführt, damit sie sogleich sieht, und deutlich begreift, was sie zuvor nur gehöret hat. Der Unterricht von einer Stunde ist oft zu dieser Absicht hinlänglich.

Uiberdies wird die Jugend nach geendigtem Schuljahre von dem Lehrer selbst in allen praktischen Theilen so lange geübt, bis sie endlich mit jedem Instrumente umzugehen, und nach der erhaltenen Anleitung für jeden besonderen Fall die schicklichste Methode schnell zu ergreifen, und muthig auszuführen lernt.

Die Lehre der proportionirten Linien wird blos durch die Algebra entwickelt, und dadurch der Weg zur Ausführung der Gleichungen gebahnt, welche sofort auf die Verwandlung und Eintheilung der Figuren angewendet wird.

Auf diese Art erfährt der Schüler die Sätze jener Lehren nach der angenehmsten Methode durch seine eigene Entdeckung, und erhält zugleich durch die Ausübung selbst den deutlichsten Begrif von der Anwendung der Algebra auf die Geometrie, welche für den Meßkünstler immer der einzelne Weg sowohl zur Erfindung unbekannter Wahrheiten, als zur Auflösung der Aufgaben bleibt.

Die

Die Körpermessung ist wieder nach blos geometrischer Methode abgehandelt, und auf die Lehre von der Lage der geraden Linien und Ebenen gegründet.

In Ansehung des Nivellirens, und der Trigonometrie bleibt nichts unerwogen, was zum Begriffe der Sache, zur Theorie, zur Anwendung, zur Auswahl und Berichtigung der Instrumente, und zu der bei jeder Ausführung vom Anfange bis zum Ende zu beobachtenden Ordnung gehört. Und da die Erfahrung gelehret hat, daß die Migrometerschraube an dem Linial des Quadranten durch die Gewalt, und den öfteren Gebrauch zu früh verdorben wird, so hat man die Abänderung getrofen, daß genannte Schraube an dem oberen Fernrohr angebracht worden.

Bei der Ausarbeitung eines jeden Stückes hatte ich das von meinen Obern mir aufgesetzte Ziel (die Beförderung des allerhöchsten Dienstes) beständig vor Augen. Dieses Bild, und die schmeichelhafte Hofnung, das in mich gesetzte Vertrauen verdienen zu können, machte mir das anhaltende Nachdenken, und jede Anstrengung gering.

Der Verfasser.

Inhalt

Inhalt
dieses zweiten Theils.

Seite.

Von

Inhalt.

Seite

Von

Inhalt.

Seite

zon-

Inhalt.

Seite

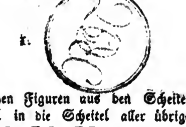
Von

Inhalt.

Fort-



Fortsetzung der Theorie.



1.

Zieht man in ähnlichen Figuren aus den Scheiteln zweener gleicher Winkel in die Scheitel aller übrigen Winkel die Geraden FB, FC, FD und fb, fc, fd; so sind die Winkel A und a, und die Verhältnisse AB : ab, AF : af gleich, also die Dreyecke ABF und abf ähnlich: daher verhält sich ferner BF : bf = BA : ba oder BF : bf = BC : bc; folglich sind auch die Dreyecke BCF und bcf wegen der gleichen Winkel B und b ähnlich, u. s. w. Fig. 226. 227.

Aehnliche Figuren können also allemal in gleichviel ähnliche Dreyecke derselben Ordnung nach eingetheilet werden.

2. Weil das Verhältniß der gleichnamigen Seiten ähnlicher Figuren immer dasselbe bleibt, und (nach Nro. 197. **Rechenk.**) die Summe der Vorsätze zur Summe der Nachsätze mehrerer gleichen Verhältnisse sich, wie jeder Vorsatz zu seinem Nachsatze ebenderselben verhält; so verhalten sich auch die Summen aller Seiten oder die Perimeter ähnlicher Figuren, wie jede zwo gleichnamigen Seiten derselben. Und da ferner jede zwey ähnlichen Dreyecke ABF und abf, BCF und bcf &c. sich wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten verhalten; so verhalten sich auch die Summen aller dieser Dreyecke oder die Fig. 226. 227.

ähnlichen Figuren, wie die Quadrate jeder zwo gleichnamigen Seiten derselben.

Die Perimeter ähnlicher Figuren verhalten sich also wie ihre gleichnamigen Seiten, die ähnlichen Figuren aber wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

Ist z. B. eine Seite ab die Hälfte der ihr gleichnamigen AB; so ist auch jede andere bc die Hälfte der ihr gleichnamigen BC, und der Perimeter abcdef die Hälfte des Perimeters ABCDEF: jedes Dreyeck abf aber ist nur das Viertel des ihm ähnlichen ABF, und die Figur abcdef nur das Viertel der ihr ähnlichen ABCDEF.

Fig. 228. 229. 3. In ordentlichen Vielecken von gleichviel Seiten sind die Winkel a, b, d, e, f, g des einen den Winkeln A, B, D, E, F, G des andern gleich; ferner sind es auch die Seiten AB, BD, DE &c. in dem einen, und die Seiten ab, bd, de &c. in dem andern Vielecke; also verhält sich

$$AB : ab = BD : bd = DE : de \text{ \&c.}$$

folglich sind ordentliche Vielecke von gleichviel Seiten allemal ähnliche Figuren. Und zieht man die Halbmesser AC, BC und ac, bc; so sind die Dreyecke ABC und abc ähnlich; also verhält sich AB : ab = AC : ac.

Die Perimeter ordentlicher Vielecke von gleichviel Seiten verhalten sich also, wie ihre Halbmesser, diese Vielecke aber, wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Verhalten sich z. B. die Halbmesser wie 3 : 1; so verhalten sich auch die Perimeter wie 3 : 1, die Vielecke aber wie 9 : 1.

Fig. 228. 229. 4. Schreibt man zweenen Kreisen zwey ordentliche Vielecke von gleichviel Seiten ein, sodann wieder zwey, welche noch soviel Seiten als jene haben, und fährt so ohne Ende fort; so werden diese Vielecke sobald sie unendlich

lich viele Seiten haben, nach Nro. 102. Meß. den Kreisen, und ihre Perimeter den Umfängen gleich.

Kreise sind also ähnliche Figuren, und verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser, oder wie die Quadrate der Durchmesser, ihre Umfänge aber wie die Halbmesser oder wie die Durchmesser derselben.

Verhalten sich z. B. die Durchmesser wie 3 : 2; so verhalten sich auch die Umfänge wie 3 : 2, die Kreise aber wie 9 : 4.

5. Theilt man jede zwo ähnliche Figuren in gleichviel ähnliche Dreyecke ein, und zieht von den gleichnamigen Scheiteln auf die entgegengesetzten Seiten die Senkrechten A 1 und a 1, B 2 und b 2, C 3 und c 3, E 4 und e 4; so haben die rechtwinklichten Dreyecke A 1 F a 1 f, B 2 F und b 2 f, C 3 F und c 3 f, E 4 F und e 4 f, nebst den rechten Winkeln die Winkel bey F und f gleich; folglich sind diese Dreyecke ähnlich. Fig. 226. 227.

Wenn man also die in einem Wirthschaftsplane richtig bestimmten einzelnen Figuren in Dreyecke eintheilet; so kann man die Höhe und die Grundlinie eines jeden Dreyeckes nach dem verjüngten Maßstabe messen, und folglich den Flächeninhalt einer jeden Figur, welcher insgemein seitwärts auf dem Plane ausgesetzet wird, berechnen.

Von den proportionirten geraden Linien.

6.

Wenn zwo Geraden, welche sich in einem Punkte o schneiden, von mehrern gleichlaufenden ab, cd und ef geschnitten werden; so verhält sich 1tens wegen der ähnlichen Dreyecke oab und ocd Fig. 230. 231.

A. $oa : oc = ob : od$,
also auch Fig. 230. aus A.
B. $oc - oa : oc = od - ob : od$
und Fig. 231. aus A.
C. $oa + oc : oc = ob + od : od$
oder Fig. 230. aus B. und Fig. 231. aus C.
D. $ac : oc = bd : od$
und die mittlern in D verwechselt,
E. $ac : bd = oc : od$;
2tens wegen der ähnlichen Dreyecke ocd und oef Fig. 230. und 231.
F. $oc : oe = od : of$
also aus F.
G. $oe - oc : oc = of - od : od$
oder aus G.
H. $ce : oc = df : od$
und die mittlern in H verwechselt,
I. $ce : df = oc : od$
also aus E und I.
K. $ac : bd = ce : df$
und die mittlern in K verwechselt,
L. $ac : ce = bd : df$
und aus L.
M. $ac + ce : ce = bd + df : df$
oder aus M.
N. $ae : ce = bf : df$
und wieder aus L.
O. $ac + ce : ac = bd + df : bd$
oder aus O.
P. $ae : ac = bf : bd$
Wenn die Geraden ae und bf sich nirgends schneiden; so sind sie auch gleichlaufend, also
$ac = bd$ und $ce = df$;
folglich verhält sich wieder
$ac : ce = bd : df$ u. s. f.

Was immer für Geraden werden also von mehrern Gleichlaufenden allemal in proportionirte Theile geschnitten.

Verhält sich

A. oa : ac = ob : bd;
so verhält sich auch aus A Fig. 232.

B. oa : oa + ac = ob : ob + bd
und aus A Fig. 233.

C. oa : ac — oa = ob : bd — ob
also aus B Fig. 232. und aus C Fig. 233.

D. oa : oc = ob : od

Fig. 232. 233.

Also haben die Dreyecke oab und ocd zwo Seiten proportionirt und den eingeschlossenen Winkel o gemein; folglich sind sie ähnlich, die Winkel oab und ocd gleich, und die Geraden ab und cd gleichlaufend.

Wenn also zwo Geraden von ihrem gemeinen Punkte o an durch zwo andere Geraden, welche sich zwischen jenen nicht schneiden, in proportionirte Theile geschnitten werden; so sind diese gleichlaufend.

7. Ist die Gerade 3. 4, und die Theile m, n, p und q der Geraden 1 . 2 gegeben, und man zieht unter einem beliebigen Winkel die Gerade 3 . 5, trägt die Theile m, n, p und q von 3 an auf dieselbe, und zieht 4 . 5 und durch die Theilungspunkte 6, 7, 8 die Gleichlaufenden mit 4 . 5; so verhält sich nach Vorigem

Fig. 234.

a : b : c : d = m : n : p : q

Es läßt sich also jede Gerade 3 . 4 nach einem gegebenen Verhältnisse m : n : p : q theilen.

Ist 3 . 4 in mehrere gleiche Theile zu theilen; so nimmt man auf 3 . 5 m = n = p = q und verfährt wie zuvor.

Und ist das Verhältniß, nach welchem eine Gerade getheilet werden soll, in Zahlen gegeben, z. B. 3 : 2 : 5 : 4;

so

so wird $m = 3$, $n = 2$, $p = 5$ und $q = 4$, also $m + n + p + q = 14$. Daher trägt man 14 gleiche Theile auf 3 . 5, nimmt 3 derselben für m, 2 für n, 5 für p, und 4 für q an, und verfährt wie zuvor.

Fig. 235. 236. 8. Wenn die Gleichlaufenden ac und df von mehrern Geraden od, oe und of geschnitten werden; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke oba und oed

A. $ob : oe = ab : de$

und wegen der ähnlichen Dreyecke obc und oef

B. $ob : oe = bc : ef$

also aus A und B.

C. $ab : de = bc : ef$

und die mittlern in C verwechselt,

D. $ab : bc = de : ef$

also aus D.

E. $ab + bc : bc = de + ef : ef$

oder aus E.

F. $ac : bc = df : ef$

und wieder aus D.

G. $ab + bc : ab = de + ef : de$

oder aus G.

H. $ac : ab = df : de$

also die mittlern in F verwechselt,

I. $ac : df = bc : ef$

und die mittlern in H verwechselt,

K. $ac : df = ab : de$.

Daher werden was immer für gleichlaufende Geraden von mehrern Geraden, welche in einem Punkte zusammen laufen, allemal in proportionirte Theile geschnitten.

Fig. 237. Verhält sich

A. $de : ab = ef : bc$

und ist ac mit df gleichlaufend; so verhält sich auch (wenn da und eb in o, fc und ob in n zusammen laufen) wegen der ähnlichen Dreyecke oba und oed

B. $de : ab = eo : bo$

und

und wegen der ähnlichen Dreyecke n b c und n e f

C. $ef : bc = en : bn$

also wegen A aus B und C.

D. $eo : bo = en : bn$

und aus D.

E. $eo - bo : bo = en - bn : bn$

oder aus E.

F. $eb : bo = eb : bn$;

also ist $bo = bn$.

Wenn daher zwo Gleichlaufenden von mehrern Geraden, welche nicht gleichlaufen, in proportionirte Theile geschnitten werden; so schneiden sich alle diese Geraden in einem und demselben Punkte.

9. Wenn die Geraden 5 . 7 und 4 . 6 von den Gleichlaufenden 2 . 3, 4 . 5, und 6 . 7 geschnitten werden; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 1 . 2 . 3 und 1 . 4 . 5, 1 . 2 . 3 und 1 . 6 . 7 (Fig. 238.)

1tens $\begin{cases} 1.2 : 2.3 = 1.4 : 4.5 \\ 1.2 : 2.3 = 1.6 : 6.7 \end{cases}$

2tens $\begin{cases} 1.2 : 1.3 = 1.4 : 1.5 \\ 1.2 : 1.3 = 1.6 : 1.7 \end{cases}$

und wegen der Gleichlaufenden

3tens $\begin{cases} 1.2 : 1.3 = 2.4 : 3.5 \\ 1.2 : 1.3 = 2.6 : 3.7 \end{cases}$

Diese 6 Proportionen geben ebensoviele Methoden an die Hand, zu drey gegebenen Geraden a, b und c die vierte Proportionirte x zu finden.

Denn nimmt man 1tens auf jeder Geraden $1.2 = a$, und zieht unter einem beliebigen Winkel $2.3 = b$, und durch 1 und 3 die Gerade 5 . 7: macht sodann noch $1.4 = c$ und zieht 4 . 5 gleichlaufend mit 2 . 3; so wird $4.5 = x$: oder macht noch $1.6 = c$ und zieht 6 . 7 gleichlaufend mit 2 . 3; so wird $6.7 = x$. (Fig. 239.)

Oder zeichnet man 2tens einen beliebigen Winkel 5 . 1 . 4, nimmt $1.2 = a$ und $1.3 = b$ und zieht 2 . 3: (Fig. 240.)

macht

macht sodann noch $1.4 = c$, und zieht 4.5 gleichlaufend mit 2.3; so wird $1.5 = x$: oder macht noch $1.6 = c$ und zieht 6.7 gleichlaufend mit 2.3; so wird $1.7 = x$.

Fig. 241. Oder nimmt man 3tens wieder auf einem beliebigen Winkel $1.2 = a$ und $1.3 = b$, und zieht 2.3: macht sodann noch $2.4 = c$, und zieht 4.5 gleichlaufend mit 2.3; so wird $3.5 = x$: oder macht noch $2.6 = c$, und zieht 6.7 gleichlaufend mit 2.3; so wird $3.7 = x$.

Denn so verhält sich in jedem Falle

$$a : b = c : x.$$

Ist $b = c$; so verhält sich

$$a : b = b : x,$$

folglich wird x die dritte Proportionirte zu a und b.

Man findet also die dritte Proportionirte eben so wie die vierte, wenn man überall anstatt c wieder b aufträgt.

Fig. 242. 10. Wenn man auf der Grundlinie 2.5 ein Rechteck $2.5.6.7$, welches einem gegebenen Rechtecke $1.2.3.4$ gleich ist, zeichnen soll, und man setzt $1.2 = b$, $1.3 = c$, $2.5 = a$ und die unbekannte Seite $2.7 = x$; so ist der Flächeninhalt des Rechteckes $1.2.3.4 = bc$ und jener des Rechteckes $2.5.6.7 = ax$; also vermög der Bedingung der Aufgabe

$ax = bc$; folglich verhält sich

$$a : b = c : x.$$

Da nun die drey ersten Glieder a, b und c dieser Proportion schon auf den Schenkeln des Winkels $1.2.5$ liegen; so erhält man das vierte Glied $2.7 = x$ nach Vorigem, wenn man 3.7 gleichlaufend mit 1.5 zieht, sodann das Rechteck $2.5.6.7$, wenn man 7.6 gleichlaufend mit 2.5, und 5.6 gleichlaufend mit 2.1 zieht.

Fig. 243. Ist das gegebene Rechteck $1.2.3.4$ ein Quadrat; so wird $ax = bb$, folglich verhält sich

$$a : b = b : x,$$

also erhält man wieder wie zuvor $2.7 = x$, wenn man 3.7 gleichlaufend mit 1.5 zieht, u. s. f.

201.

11. Zieht man in einem rechtwinklichten Dreyecke 2.1.3 von dem Scheitel 1 des rechten Winkels auf die Hypothenuse 2.3 die Senkrechte 1.4; so sind die rechtwinklichten Dreyecke 2.1.4 und 2.1.3, 3.1.4 und 3.1.2 ähnlich, weil jene den Winkel 2 und diese den Winkel 3 gemein haben: folglich haben die Dreyecke 2.1.4 und 3.1.4 auch die Winkel 4.2.1 und 4.1.3, 4.3.1 und 4.1.2 gleich; also sind auch diese ähnlich.

Fig. 244.

Nennt man nun die Hypothenuse a, eine Kathede c und die andere b, die Senkrechte y, einen Theil der Hypothenuse x, und folglich den andern Theil derselben a — x; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 2.1.4 und 2.1.3.

A. $a : c = c : x$

wegen der ähnlichen Dreyecke 3.1.4 und 3.1.2.

B. $a : b = b : a - x$

und wegen der ähnlichen Dreyecke 2.1.4 und 3.1.4.

C. $x : y = y : a - x$.

Es ist also eine jede von diesen drey Geraden 2.1, 4.1 und 3.1 die mittlere Proportionirte zwischen jenen zwo Geraden, welche auf der Hypothenuse von ihrem Durchschnitte an, bis an die Durchschnitte der zwo übrigen reichen: 2.1 nämlich zwischen 2.3 und 2.4, 3.1 zwischen 3.2 und 3.4, und 4.1 zwischen 4.2 und 4.3.

Ferner wird aus A. $cc = ax$

aus B. $bb = aa - ax$

und aus C. $yy = ax - xx$.

Daher ist das Quadrat einer jeden aus diesen drey Geraden 2.1, 3.1 und 4.1 dem Rechtecke, dessen Faktoren auf der Hypothenuse zwischen ihrem Durchschnitte und den Durchschnitten der zwo übrigen begriffen sind, gleich.

So ist das Quadrat von $2.1 = 2.4 \times 2.3$,
das Quadrat von $4.1 = 4.2 \times 4.3$, und
das Quadrat von $3.1 = 3.4 \times 3.2$.

Eben diese Sätze können auch, wie folgt, ausgedrücket werden.

Zieht man in einem rechtwinklichten Dreyecke durch den Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse die Senkrechte; so ist diese die mittlere Proportionirte zwischen den Theilen der Hypothenuse, jede Kathede aber die mittlere Proportionirte zwischen der ganzen Hypothenuse und dem anliegenden Theile derselben. Oder das Quadrat der Senkrechten ist dem Rechtecke unter den Theilen der Hypothenuse, das Quadrat jeder Kathede aber dem Rechtecke unter der ganzen Hypothenuse und dem anliegenden Theile derselben gleich.

Fig. 245. 12. Zieht man von jedem Punkte des Umfanges auf den Durchmesser die Senkrechte 1.4, und die Sehnen 1.2 und 1.3; so ruhet der Winkel beym Umfange $2.1.3$ auf dem Durchmesser 2.3, und ist folglich ein rechter Winkel.

Wenn man also von jedem Punkte des Umfanges auf den Durchmesser die Senkrechte und die Sehnen zieht; so ist die Senkrechte die mittlere Proportionirte zwischen den Theilen des Durchmessers, jede Sehne aber die mittlere Proportionirte zwischen dem ganzen Durchmesser und dem ihr anliegenden Theile desselben. Oder das Quadrat der Senkrechten ist dem Rechtecke unter den Theilen des Durchmessers, das Quadrat jeder Sehne aber dem Rechtecke unter dem ganzen Durchmesser und dem ihr anliegenden Theile desselben gleich.

Die-

Dieses leitet wieder auf zwo Methoden, zwischen zwo gegebenen Geraden a und b die mittlere Proportionirte x zu finden.

Denn nimmt man 1tens auf einer beliebigen Geraden $4.3 = a$, und $4.2 = b$, beschreibt auf 2.3 einen Halbkreis, und zieht 4.1 senkrecht auf 2.3; so ist $4.1 = x$. Fig. 246.

Oder nimmt man 2tens $2.3 = a$ und $2.4 = b$, beschreibt auf 2.3 einen Halbkreis, und zieht 4.1 senkrecht auf 2.3, und die Sehne 1.2; so ist $1.2 = x$. Fig. 247.

Denn in jedem Falle verhält sich

$$a : x = x : b.$$

13. Wenn man ein Quadrat $2.5.6.7$, welches einem gegebenen Rechtecke $1.2.3.4$ gleich ist, zeichnen soll, und man setzt $1.2 = b$, $2.3 = a$ und die unbekannte Seite des Quadrates $2.7 = x$; so ist der Flächeninhalt des Rechteckes ab, und jener des Quadrates xx; also vermög der Bedingung der Aufgabe Fig. 248.

$$xx = ab \text{ und}$$

$$a : x = x : b.$$

Beschreibt man also aus 2 mit dem Halbmesser 2.1 einen Bogen, welcher die Gerade 2.3 in 9 schneidet, sodann auf 9.3 einen Halbkreis $9.7.3$; so wird 2.7 der Seite x, und das Quadrat $2.5.6.7$ dem Rechtecke $1.2.3.4$ gleich.

14. Weil Nro. 11. Fig. 244.

$$cc = ax \text{ und}$$

$$bb = aa - ax;$$

so geben diese Gleichungen addirt

$$bb + cc = aa - ax + ax \text{ oder}$$

A. $aa = bb + cc$

B. $bb = aa - cc$

C. $cc = aa - bb.$

Das Quadrat der Hypothenuse ist also der Summe der Quadrate beeder Katheden, und das Quadrat jeder Kathede dem Quadrate der Hypo-

the-

thenuse weniger dem Quadrate der andern Kathede gleich.

Fig. 249. Sind also zwey Quadrate 1.2.3.4 und 5.6.7.8 gegeben, und man verlängert 1.2 bis 2.9 gleich 5.6 wird, und zeichnet auf der Hypothenuse 9.3 ein Quadrat 3.9.10.11; so wird dieses der Summe der zwey gegebenen gleich. Und beschreibt man auf einer Seite 1.4 des größern einen Halbkreis, trägt 5.6 als eine Sehne von 1 in 12 auf, und zeichnet auf der Kathede 12.4 ein Quadrat 12.4.13.14; so wird dieses dem Unterscheide der gegebenen gleich.

Ferner ist aus A. $a = \sqrt{bb + cc}$

aus B. $b = \sqrt{aa - cc}$

und aus C. $c = \sqrt{aa - bb}$

Daher ist die Hypothenuse allzeit der Wurzel aus der Summe der Quadrate beeder Katheden, und jede Kathede der Wurzel aus dem Unterscheide des Quadrates der Hypothenuse und des Quadrates der andern Kathede gleich.

Oder die Wurzel aus der Summe zweyer Quadrate ist allzeit die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyeckes, dessen eine Kathede der Seite des einen Quadrates, und die andere Kathede der Seite des andern Quadrates gleich ist; und die Wurzel aus dem Unterscheide zweyer Quadrate ist allzeit eine Kathede des rechtwinklichten Dreyeckes, dessen Hypothenuse der Seite des bejahenden Quadrates, und dessen andere Kathede der Seite des verneinenden Quadrates gleich ist.

Fig. 250. Ist $x = \sqrt{mm + nn}$, m und n gegeben, und man nimmt auf den Schenkeln eines rechten Winkels 2.1.3 die Gerade 1.2 = m und 1.3 = n; so wird 2.3 = x.

Und

Und ist $x = \sqrt{mm - nn}$, und man beschreibt auf 2 : 3 = m einen Halbkreis und trägt n = 1 . 2 als eine Sehne von 2 in 1 auf; so wird 1 . 3 = x. Fig. 251.

Ist m = n, so ist auch mm = nn, also $mm - nn = 0$, und $x = \sqrt{mm - nn} = \sqrt{0} = 0$.

Und ist $n > m$; so ist auch $nn > mm$, also $mm - nn$ eine verneinende, und $x = \sqrt{mm - nn}$ eine unmögliche Größe.

Ebendieses stimmet auch mit der Zeichnung überein. Denn wäre die Sehne 2 . 1 dem Durchmesser 2 . 3 gleich; so würde der Punkt 1 in den Punkt 3 fallen, folglich 3 . 1 = 0 werden: und wäre 2 . 1 größer, als der Durchmesser 2 . 3; so könnte 2 . 1 unmöglich eine Sehne dieses Kreises seyn. Fig. 251.

Sind m und n in Zahlen gegeben; so kann auch die Hypothenuse $x = \sqrt{mm + nn}$, oder die unbekannte Kathede $x = \sqrt{mm - nn}$, nachdem die Summe jener Quadrate mm + nn, oder der Unterscheid derselben mm — nn eine Quadratzahl ist oder nicht, vollkommen oder durch Näherung in Zahlen gefunden werden.

Ist z. B. eine Kathede m = 4 und n = 3; so wird die Hypothenuse $x = \sqrt{mm + nn} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. Fig. 250.

Und ist die Hypothenuse m = 5 und die gegebene Kathede n = 4; so ist die unbekannte Kathede $x = \sqrt{mm - nn} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$. Fig. 251.

Nimmt man also in einer geraden Linie ab = 4°, befestiget eine Meßkette ae = 5° in a, und eine andere be = 3° in b, und zieht die Ende e dieser zwo Ketten in einen Punkt c zusammen; so ist cba ein rechter Winkel. Fig. 252.

15. Zieht man den Halbmesser 1 . 5 senkrecht auf die Sehne 2 . 3; so wird die Sehne 2 . 3 in 4, und der Bogen 2 . 3 in 5 halbiret. Ist nun der Halbmesser 1 . 2 Fig. 253.

und

und die Sehne 2.3 in Zahlen gegeben; so giebt 2.3 halbirt die Kathede 2.4, sodann das rechtwinklichte Dreyeck 2.4.1 nach Vorigem die Kathede 1.4, diese von dem Halbmesser 1.5 abgezogen die Kathede 5.4 des Dreyeckes 2.4.5, und dieses Dreyeck endlich wieder nach Vorigem die Hypothenuse 2.5.

Es läßt sich also aus dem gegebenen Halbmesser und der Sehne eines Bogens allemal auch die Sehne des halben Bogens berechnen.

Ist der Halbmesser $1.2 = r$, die Sehne $2.3 = a$, und die Sehne $2.5 = x$; so ist $2.4 = \frac{a}{2}$, also wegen des rechtwinklichten Dreyeckes 2.4.1

$$1.4 = \sqrt{rr - \frac{aa}{4}}, \text{ folglich}$$

$$5.4 = r - \sqrt{rr - \frac{aa}{4}} \text{ und endlich}$$

wegen des rechtwinklichten Dreyeckes 2.4.5

$$2.5 = \sqrt{\frac{aa}{4} + \left(r - \sqrt{rr - \frac{aa}{4}}\right)^2}$$

$$2.5 = \sqrt{\frac{aa}{4} + rr - 2r\sqrt{rr - \frac{aa}{4}} + rr - \frac{aa}{4}}$$

$$2.5 = \sqrt{2rr - 2r\sqrt{rr - \frac{aa}{4}}}$$

$$2.5 = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{rr - \frac{aa}{4}}\right)}.$$

Ist der Halbmesser $r = 1$; so wird

$$x = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{aa}{4}}\right)}:$$

und

und ist ferner a die Seite des ordentlichen Sechsecks, welches dem Kreise eingeschrieben ist; so wird auch $a = 1$, also in diesem Falle die Seite des Zwölfeckes

$$x = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}}\right)}$$

$$x = \sqrt{2 - 2\sqrt{\tfrac{3}{4}}}$$

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$x = \sqrt{2 - 1.732051}$$

$$x = \sqrt{0.267949}$$

$$x = 0.517$$

und setzet man die $\sqrt{3}$ noch weiter fort; so wird noch genauer $x = 0.51764$.

Nimmt man den Halbmesser r, wie man immer will, an; so findet man vermittelst dieser Gleichung

$$x = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{rr - \frac{aa}{4}}\right)}$$

1tens durch $a =$ der Seite des 6eckes $x =$ der Seite des 12eckes, 2tens durch $a =$ der Seite des 12eckes $x =$ der Seite des 24eckes, 3tens durch $a =$ der Seite des 24eckes $x =$ der Seite des 48eckes u. s. f. Und multipliciret man die jedesmal gefundene Seite mit der Anzahl der Seiten des Vieleckes, so erhält man auch den Perimeter desselben.

Es kann also durch Fortsetzung dieser Rechnung aus einem gegebenen Halbmesser der Perimeter eines ordentlichen dem Kreise eingeschriebenen Vieleckes, welches mehr Seiten als jede gegebene Zahl Einheiten hat, berechnet werden.

16. Die Umfänge der Kreise verhalten sich wie die Durchmesser derselben, oder das Verhältniß des Durchmessers zu dem Umfange bleibt in allen Kreisen immer dasselbe. Es kömmt also um dieses Verhältniß in Zahlen zu finden nur darauf an, daß man den Durchmesser eines Kreises von einer gewissen Anzahl gleicher Theile anneh-

me,

ne, und durch Rechnung ausfindig mache, wieviel von ebendiesen gleichen Theilen die Länge des Umfanges enthalte. Denn enthält der Durchmesser a und der Umfang b solche Theile; so verhält sich jeder Durchmesser zu seinem Umfange wie die Zahl a zu der Zahl v. Da man dieses bisher auf keine Weise bewerkstelligen konnte; so hat man anstatt des Umfanges den Perimeter eines dem Kreise eingeschriebenen ordentlichen Vieleckes von sehr vielen Seiten nach Vorigem berechnet, und das Verhältniß des Durchmessers zu diesem Perimeter als das Verhältniß des Durchmessers zu dem Umfange angenommen, als welches dem wahren Verhältnisse des Durchmessers zu dem Umfange desto näher kömmt, je grösser die Anzahl der Seiten des berechneten Perimeters ist.

Nach Archimeds Berechnung verhält sich der Durchmesser zu dem Umfange wie 7:22. Nach Metius wie 113:355, und nach Ludolphs von Cölln wie 1:3.14159265358979323846264338327950, welches Verhältniß, wenn man nur die zwo ersten zehntheiligen Ziffern beybehält und Vor- und Nachsaß durch 100 multiplicirt, das Verhältniß 100:314 giebt.

Nimmt man z. B. das Verhältniß 7:22 an; so werden aus einem jeden dieser drey Stücke, dem Durchmesser a, dem Umfange c, und dem Flächeninhalte b, die zwey übrigen gefunden.

Denn ist 1tens a gegeben; so verhält sich

$$7 : 22 = a : c; \text{ also ist}$$

$$c = \frac{22a}{7}$$

und $b = \frac{a}{2} \times \frac{c}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{11a}{7} = \frac{11aa}{14}.$

Ist 2tens c gegeben; so verhält sich

$$22 : 7 = c : a; \text{ also ist}$$

$$a = \frac{7c}{22} \text{ und}$$

$$b = \frac{a}{2} \times \frac{c}{2} = \frac{7c}{44} \times \frac{c}{2} = \frac{7cc}{88}.$$

Und

Und ist 3tens b gegeben; so ist

$$\frac{11aa}{14} = b$$

$$11aa = 14b$$

$$aa = \frac{14b}{11}, \text{ also}$$

$$a = \sqrt{\frac{14b}{11}}.$$

und $\frac{7cc}{88} = b$

$$7cc = 88b$$

$$cc = \frac{88b}{7}, \text{ also}$$

$$c = \sqrt{\frac{88b}{7}}.$$

Ist der Halbmesser $1.5 = b$ und der Halbmesser $1.2 = a$, und das Verhältniß des Durchmessers zu dem Umfange $= r:c$; so verhält sich

Fig. 254.

$$r : c = 2a : \frac{2ca}{r};$$

also ist der Umfang des größern Kreises $= \frac{2ca}{r}$, und der Flächeninhalt ebendesselben $= a \times \frac{ca}{r} = \frac{caa}{r}$.

Ebenso wird der Flächeninhalt des kleinern Kreises $= \frac{cbb}{r}$, also der Flächeninhalt der Krone, welche zwischen beeden Umfängen begriffen ist, $= \frac{caa}{r} - \frac{cbb}{r}$

$$= \frac{c}{r}(aa - bb) = \frac{c}{r}(a+b)(a-b).$$

Es ist aber $a+b = 2.5$ und $a-b = 3.5$. Zieht man also $5.4 = n$ senkrecht auf 2.3; so ist nach Nro.

12. $nn (a + b) (a - b) = aa - bb$; folglich ist der Flächeninhalt der Krone $= \frac{cnn}{r}$, also dem Kreise, der mit dem Halbmesser $5 . 4 = n$ beschrieben wird, gleich.

Fig. 255. Stellet man sich vor, es wäre der Ausschnitt a c b eines Kreises in unendlich kleine gleichschenklichte Dreyecke eingetheilt, und sieht die unendlich kleinen Bögen b d, d e &c. als derselben Grundlinien an; so ist der Flächeninhalt eines jeden aus diesen Dreyecken b c d dem Produkte aus der halben Grundlinie b d in den Halbmesser gleich; also ist auch der Flächeninhalt der Summe aller dieser Dreyecke oder jener des Ausschnittes a c b dem Produkte aus der Summe aller jener halben Grundlinien oder aus dem halben Bogen a b in den Halbmesser gleich. Sagt man also: es verhält sich 360 zu der Anzahl der Grade des Bogens a b wie der Umfang des Kreises zu dem Bogen a b; so giebt die Hälfte des vierten Gliedes dieser Proportion mit dem Halbmesser multiplicirt den Flächeninhalt des Ausschnittes a c b, und zieht man den Flächeninhalt des Dreyeckes a c b von jenem des Ausschnittes a c b ab, so erhält man auch den Flächeninhalt des Abschnittes, der zwischen den Bogen a b und der Sehne a b begriffen ist.

Den Flächeninhalt des Kreises ohne Annäherung bestimmen, ist jene berühmte Preisfrage, welche unter dem Namen **Quadratur des Kreises** erschien. Der Irrthum derjenigen, welche diese Aufgabe aufgelöset zu haben glaubten, bestund insgemein darinn, daß sie eines aus jenen Verhältnissen des Durchmessers zu dem Umfange, welche durch Annäherung gefunden worden sind, als vollkommen richtig voraussetzten.

Fig. 256. 17. Theilt man den Winkel 1 des Dreyeckes 2.1.3 durch 1.4 in zween gleiche; so haben die Dreyecke 1.4.2 $= P$ und $1.4.3 = Q$ 1tens die Winkel bey 1 gleich; also verhält sich $P : Q = ac : bc$ oder

$$P : Q = a : b;$$

2tens

2tens haben ebendiese Dreyecke die Höhe 1.5 gemein; also verhält sich ferner $P : Q = m : n$, folglich auch $m : n = a : b$.

Wenn also eine Gerade einen Winkel eines Dreyeckes halbirt; so schneidet sie die entgegengesetzte Seite in zween mit den übrigen Seiten proportionirte Theile.

Verhält sich $a : b = r : s$, und man halbirt den Winkel 2.1.3 durch 1.4; so verhält sich nach Vorigem auch $a : b = m : n$, folglich
$m : n = r : s$, und
$m + n : m = r + s : r$.
Es ist aber $m + n = r + s$, also $m = r$, 1.5 und 1.4 nur eine und dieselbe Gerade, folglich der Winkel 5.1.2 = 5.1.3.

Fig. 257.

Wenn also eine Gerade, welche durch einen Scheitel eines Dreyeckes geht, die entgegengesetzte Seite in zween mit den übrigen Seiten proportionirte Theile schneidet; so halbirt sie den Winkel.

18. Wenn zwo Sehnen 1.2 und 3.4 sich inner oder außer dem Kreise in einem Punkte 5 schneiden, und man zieht 1.3 und 2.4; so sind die Winkel beym Umfange 2 und 3, welche auf demselben Bogen 1.4 ruhen, gleich, also die Dreyecke wegen des Fig. 259. gemeinen, und der Fig. 258. gleichen Winkel bey 5, ähnlich; folglich verhält sich $a : n = m : b$, und daher ist
$ab = mn$ oder
$5.1 \times 5.2 = 5.3 \times 5.4$.

Fig. 258. 259.

Schneiden sich also zwo Sehnen inner oder außer dem Kreise; so sind die Rechtecke, deren Faktoren auf einer oder auf der andern Sehne zwischen ihrem Durchschnitte und den Durchschnitten des Umfanges genommen werden, gleich.

Oder im ersten Falle ist das Rechteck unter den Theilen der einen Sehne dem Rechtecke unter den Theilen der andern Sehne, und im zweyten Falle das Rechteck unter der einen Sekante und ihrem äußern Theile dem Rechtecke unter der andern Sekante und ihrem äußern Theile gleich.

Fig. 260. Drehet sich die Sekante 2.5 um den Punkt 5 gegen der Tangente 5.6; so wird der eine Faktor a des Rechteckes ab immer größer und der andere Faktor b immer kleiner, bis endlich beede, da die Punkte 1 und 2 mit dem Berührungspunkte 6 übereinkommen, der Tangente x gleich werden. In diesem Falle ist $xx = ab$, und $ab = mn$, also auch $xx = mn$.

Wenn sich also eine Tangente und eine Sekante begegnen; so ist das Quadrat der Tangente dem Rechtecke unter der Sekante und ihrem äußern Theile gleich.

Fig. 261. Oder zieht man 2.5 durch den Mittelpunkt 7, und durch den Berührungspunkt 6 den Halbmesser 6.7; so ist der Durchmesser $2.1 = b - a$, der Halbmesser $7.1 = \frac{b-a}{2}$, also die Hypothenuse 5.7 des rechtwinklichten Dreyeckes $5.6.7 = \frac{b-a}{2} + a$ $= \frac{b-a+2a}{2} = \frac{b+a}{2}$; folglich wird nach Nro. 14.

$$\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + xx, \text{ oder}$$

$$\frac{bb+2ab+aa}{4} = \frac{bb-2ab+aa}{4} + xx,$$

$$bb+2ab+aa = bb-2ab+aa+4xx,$$

$$4xx = 4ab,$$

$xx = ab = mn$ wie zuvor.

Fig. 262. 19. Ist in dem Dreyecke 2.1.3 die Seite $2.3 > 2.1$ und $2.1 > 3.1$; so ist auch der Winkel $1 > 3$ und der Winkel $3 > 2$; also sind die Winkel 2 und 3

spitze Winkel; folglich wird die Senkrechte 1 . 4 die Grundlinie 2 . 3 in einem Punkte 4 zwischen 2 und 3 schneiden, und der **Abschnitt** 2 . 4 der Grundlinie, welcher an der grössern Seite 2 . 1 liegt, grösser seyn, als der Abschnitt 3 . 4, welcher an der kleinern Seite 3 . 1 liegt. Daher muß der Umfang, den man aus 1 mit dem Halbmesser 1 . 3 beschreibt, die Seite 1 . 2 in einem Punkte 6 und den Abschnitt 2 . 4 in einem Punkte 5 schneiden, so daß 4 . 5 = 3 . 4 wird.

Setzt man nun 1 . 2 = b, 1 . 3 = c, 2 . 4 = m und 3 . 4 = n; so ist 2 . 7 = b + c, 2 . 6 = b — c, 2 . 3 = m + n und 2 . 5 = m — n, also nach Vorigem

$$(m+n)\,(m-n) = (b+c)\,(b-c)$$

folglich verhält sich $m+n : b+c = b-c : m-n$.

Zieht man also auf die größte Seite eines Dreyeckes durch den entgegengesetzten Scheitel die Senkrechte; so verhält sich die Grundlinie (die größte Seite) zu der Summe der Seiten, wie der Unterscheid der Seiten zu dem Unterscheid der Abschnitte der Grundlinie.

Addirt man den halben Unterscheid zwoer Größen zu der halben Summe derselben; so erhält man die Größere: und zieht man den halben Unterscheid zwoer Größen von der halben Summe derselben ab; so kömmt die Kleinere zum Vorschein. Nro. 137. **Rechenk.** So ist auch hier

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)+\left(\frac{m-n}{2}\right)=\frac{m+n+m-n}{2}=\frac{m+m}{2}=m,$$

und $$\left(\frac{m+n}{2}\right)-\left(\frac{m-n}{2}\right)=\frac{m+n-m+n}{2}=\frac{n+n}{2}=n.$$

Wenn also die drey Seiten eines ungleichseitigen Dreyeckes 2 . 1 . 3 in Zahlen gegeben sind, und man nimmt die größte Seite 2 . 3 für die Grundlinie an; so findet man 1tens durch jene Proportion den Unterscheid m — n = 2 . 5 der Abschnitte der Grundlinie, 2tens den grössern Abschnitt m = 2 . 4, wenn man den halben Unter-

terscheid der Abschnitte zu der halben Grundlinie addiret, 3tens die Kathede 1.4, wenn man das Quadrat der Kathede 2.4 von dem Quadrate der Hypothenuse 2.1 abzieht, und aus dem Unterscheide die Wurzel auszieht, 4tens endlich den Flächeninhalt des Dreyeckes 2.1.3, wenn man die Höhe 1.4 mit der halben Grundlinie multiplicirt. Wäre das gegebene Dreyeck 5.1 3 gleichschenklicht; so ist der Abschnitt 5.4 der halben Grundlinie gleich; also läßt sich wieder die Senkrechte 1.4 und der Flächeninhalt dieses Dreyeckes 5.1.3 finden.

Es kann also der Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes, dessen drey Seiten in Zahlen gegeben sind, berechnet werden.

Ist z. B. $m + n = 8$, $b = 7$ und $c = 5$; so verhält sich

$$m + n : b + c = b - c : m - n \text{ oder}$$

$$8 : 12 = 2 : m - n = 3$$

also ist

$$m = 4 + 1.5 = 5.5$$

$$bb = 49.00$$

$$mm = 30.25$$

$$bb - mm = 18.75$$

$$\sqrt{bb - mm} = \sqrt{18.75} = 4.33,$$

folglich der Flächeninhalt des Dreyeckes $2.1.3 = 4.33 \times 4 = 17.32$.

Von der Ausführung der bestimmten Gleichungen des ersten und zweyten Grades.

20.

Wenn jeder Buchstabe a, b, c, d &c. eine bestimmte gerade Linie bedeutet; so ist das Produkt ab aus zween derselben einem Rechtecke, dessen Höhe a und dessen Grundlinie b ist, gleich.

Weil in jeder Proportion

$$a : b = c : x$$

die vierte Proportionirte $x = \frac{bc}{a}$ dem Produkte bc der mittlern Glieder dividirt durch das erste a, und in jeder steten Proportion

$$a : b = b : x$$

die dritte Proportionirte $x = \frac{bb}{a}$ dem Quadrate bb des mittlern Gliedes dividirt durch das erste a gleich ist; so ist jeder Bruch $\frac{bc}{a}$ oder $\frac{bb}{a}$, dessen Zähler aus zween Faktoren, und der Nenner desselben aus einem besteht, nichts anders, als die vierte oder dritte Proportionirte zu dem Nenner und den zween Faktoren des Zählers.

Wenn man also ein Rechteck bc oder ein Quadrat bb durch eine Linie a dividirt; so ist der Quotient $\frac{bc}{a}$ oder $\frac{bb}{a}$ wieder eine Linie, welche man nach einer jeden aus den 6 Methoden Nro. 9. findet: indem in jedem

Falle

Falle Fig. 239. 240. 241. $x = \frac{bc}{a}$, oder, wenn $b = c$ ist, $x = \frac{bb}{a}$ wird.

Multiplicirt man die Linie $\frac{bc}{a}$ durch eine Linie m; so wird $\frac{bcm}{a}$ der Ausdruck eines Rechteckes, dessen Faktoren $\frac{bc}{a}$ und m sind: und dividirt man dieses Rechteck $\frac{bcm}{a}$ durch eine Linie e; so wird $\frac{bcm}{ae} = \frac{\frac{bc}{a} \times m}{e}$ wieder eine Linie, welche man findet, wenn man erstlich zu a, b und c die vierte Proportionirte $\frac{bc}{a}$, und sodann zu e, m, und $\frac{bc}{a}$ die vierte Proportionirte $\frac{bcm}{ae}$ sucht.

Denn es verhält sich

$$1\text{tens} \quad a : b = c : \frac{bc}{a} \text{ und}$$

$$2\text{tens} \quad e : m = \frac{bc}{a} : \frac{bcm}{ae}.$$

Ebenso giebt jeder Ausdruck einer Linie $\frac{bcm}{ae}$ mit einer andern Linie n multiplicirt ein Rechteck

$\frac{bcmn}{ae} = \frac{bc}{a} \times \frac{mn}{e}$, und jeder Ausdruck eines Rechteckes $\frac{bcmn}{ae}$ durch eine Linie q dividirt wieder

eine

eine Linie $\frac{bcmn}{aeq} = \frac{\frac{bc}{a} \times \frac{mn}{e}}{q}$ die vierte Proportionirte zu q, $\frac{bc}{a}$ und $\frac{mn}{e}$.

Es ist also jeder Bruch, $\frac{bcm}{a}$ und $\frac{bcmn}{ae}$, dessen Zähler zween Faktoren mehr als der Nenner desselben enthält, ein Ausdruck eines Rechteckes, jeder Bruch, $\frac{bc}{a}$, $\frac{bcm}{ae}$ und $\frac{bcmn}{acq}$, dessen Zähler nur einen Faktor mehr, als der Nenner desselben enthält, ein Ausdruck einer Linie, und folglich jeder Bruch $\frac{bc}{ae} = \frac{bc}{a} : e$ oder $\frac{bcm}{aeq} = \frac{bcm}{ae} : q$, dessen Zähler und Nenner gleichviel Faktoren enthalten, nur ein Ausdruck des Verhältnisses zwoer Linien $\frac{bc}{a}$ zu e, oder $\frac{bcm}{ae}$ zu q.

21. Wenn man eine geometrische Aufgabe wie jene Nro. 10. auf eine Gleichung des ersten Grades gebracht, und diese Gleichung aufgelöset hat, so, daß die unbekannte Linie x allein ein Glied der Gleichung ausmacht, und das andere Glied derselben nur aus bekannten Ausdrücken besteht; so wird die Gleichung **ausgeführet**, oder die Unbekannte x gefunden, wenn man den Werth eines jeden einzelnen Ausdruckes nach Vorigem suchet, und sodann diese Werthe, wie es die Gleichung erfordert, zusammen addirt, oder von einander abzieht.

Ist z. B. $x = \frac{bc}{a}$; so verhält sich

$a : b = c : x$; also findet man x die vierte Proportionirte zu a, b und c.

$$\text{Ist } x = \frac{bcm}{ae} = \frac{\frac{bc}{a} \times m}{e}; \text{ so verhält sich}$$

1tens $a : b = c : \frac{bc}{a}$ und

2tens $e : m = \frac{bc}{a} : x$;

also findet man $\frac{bc}{a}$ die vierte proportionirte zu a, b und c, und sodann x die vierte Proportionirte zu e, m und $\frac{bc}{a}$.

$$\text{Ist } x = \frac{bc}{a} + \frac{de}{m} - \frac{pq}{n}; \text{ so verhält sich}$$

1tens $a : b = c : \frac{bc}{a}$

2tens $m : d = e : \frac{de}{m}$ und

3tens $n : p = q : \frac{pq}{n}$.

Also findet man x, wenn man $\frac{bc}{a}$ die vierte Proportionirte zu a, b und c, $\frac{de}{m}$ jene zu m, d und e, und $\frac{pq}{n}$ jene zu n, p und q sucht, und diese von der Summe der zwo erstern abzieht.

Wenn die einzelnen Ausdrücke des bekannten Gliedes der Gleichung einen gemeinen Nenner haben, und die Zähler derselben in Faktoren aufgelöset werden können; so verfährt man einfacher, wenn man die vierte Proportionirte zu dem gemeinen Nenner und den Faktoren des Zählers sucht.

Ist

Ist z. B. $x = \frac{aa - bb}{c} = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$;
so verhält sich $c : a + b = a - b : x$;
also findet man x die vierte Proportionirte zu c, a + b und a — b.

Ist $x = \frac{ab + ac - ad}{n} = \frac{a(b + c - d)}{n}$; so verhält sich $n : a = b + c - d : x$.
Also findet man x die vierte Proportionirte zu n, a und b + c — d.

Wenn die Rechtecke des zusammengesetzten Zählers keinen gemeinen Faktor haben; so kann ein jedes dieser Rechtecke vom ersten an in ein gleiches, welches mit dem ersten einen gemeinen Faktor hat, verwandelt, und sodann die Gleichung nach voriger Methode ausgeführet werden.

Ist z. B. $x = \frac{ab + mn - pq}{e}$, und man setzt

1tens $mn = ac$, also
$a : m = n : c$
und sucht c, sodann
2tens $pq = ad$, also
$a : p = q : d$
und sucht d; so wird
$$x = \frac{ab + ac - ad}{e} = \frac{a(b + c - d)}{e},$$ also
$$e : a = b + c - d : x.$$

Ebenso läßt sich auch ein zusammengesetzter Nenner in Faktoren auflösen.

Ist z. B. $x = \frac{abc + abd}{mm - nn} = \frac{ab\ (c + d)}{(m + n)(m - n)}$
$$= \frac{\frac{ab}{m - n} \times (c + d)}{m + n};$$ so verhält sich

1tens

1tens $m - n : a = b : \frac{ab}{m-n}$ und

2tens $m + n : c + d = \frac{ab}{m-n} : x$.

Also findet man $\frac{ab}{m-n}$ die vierte Proportionirte zu $m - n$, a und b, sodann x die vierte Proportionirte zu $m + n$, $c + d$ und $\frac{ab}{m-n}$.

Hieraus erhellet, daß man zur Ausführung einer Gleichung des ersten Grades immer nur die vierte oder dritte Proportionirte zu suchen hat.

22. Weil in jeder steten Proportion

$$a : x = x : b.$$

Die mittlere Proportionirte $x = \sqrt{ab}$ der Wurzel aus dem Produkte beyder äußern Glieder gleich ist; so ist auch die Wurzel aus jedem Rechtecke $\sqrt{ab}$ nichts anders, als die mittlere Proportionirte zwischen den zween Faktoren a und b desselben.

Zieht man also aus jedem Rechtecke die Wurzel aus; so erhält man eine Linie, welche man nach einer jeden aus den zwo Methoden Nro. 12. findet: indem in jedem Falle Fig. 246. und 247. $x = \sqrt{ab}$ wird.

23. Führet nun eine geometrische Aufgabe, wie jene Nro. 13. auf eine reine quadratische Gleichung; so bringt man das Quadrat der unbekannten xx allein auf eine Seite des Gleichungszeichens, löset das bekannte Glied der Gleichung in zween Faktoren auf, und sucht endlich zwischen diesen zween Faktoren noch die mittlere Proportionirte x.

Ist z. B. $xx = aa - bb$, also

$$xx = (a + b)(a - b);$$

so verhält sich $a + b : x = x : a - b$;

folg-

folglich findet man x die mittlere Proportionirte zwischen $a + b$ und $a - b$.

Ist $xx = \frac{abc}{m} = \frac{ab}{m} \times c$;

so verhält sich

1tens $m : a = b : \frac{ab}{m}$ und

2tens $c : x = x : \frac{ab}{m}$,

also wird x gefunden, wenn man zu m, a und b die vierte Proportionirte $\frac{ab}{m}$, sodann zwischen c und $\frac{ab}{m}$ die mittlere Proportionirte x sucht.

Ist $xx = ab + cd - mn$,

und man setzt

1tens $cd = ap$ folglich
$a : c = d : p$,

und sucht p, sodann

2tens $mn = aq$, folglich
$a : m = n : q$,

und sucht q; so wird

$$xx = ab + ap - aq$$
$$xx = a(b + p - q) \text{ also}$$
$$a : x = x : b + p - q;$$

also findet man noch x die mittlere Proportionirte zwischen a und $b + p - q$.

24. Sind die einzelnen Ausdrücke des bekannten Gliedes einer reinen quadratischen Gleichung Quadrate, oder verwandelt man sie vorläufig in Quadrate; so kann die Gleichung auch vermittelst der Zeichnung eines rechtwinklichten Dreyeckes ausgeführet werden.

Denn ist $xx = mm + nn$, also

$$x = \sqrt{mm + nn},$$

oder ist $xx = mm - nn$, also

$$x = \sqrt{mm - nn};$$

so

so läßt sich x nach Nro. 14. finden: indem im ersten Falle Fig. 250. $xx = mm + nn$, und im zweyten Falle Fig. 251. $xx = mm - nn$ wird.

Ist $xx = aa + bb - cc$

und man setzt $mm = aa + bb$ also

$$m = \sqrt{aa + bb}$$

und sucht m; so wird

$$xx = mm - cc, \text{ also}$$

$$x = \sqrt{mm - cc.}$$

Ist $xx = aa + bc - ed$

und man setzt

1tens $bc = mm$ also

$$b : m = m : c$$

und sucht m, sodann

2tens $ed = nn$ also

$$e : n = n : d$$

und sucht n; so wird

$$xx = aa + mm - nn;$$

setzt man also

3tens $pp = aa + mm$, folglich

$$p = \sqrt{aa + mm}$$

und sucht p; so wird

$$xx = pp - nn, \text{ also}$$

$$x = \sqrt{pp - nn.}$$

25. Die vermischten quadratischen Gleichungen sind alle in dieser allgemeinen

$$xx = \pm px \pm qq$$

enthalten; sie begreift die vier folgenden,

1te $xx = + px + qq$

2te $xx = - px + qq$

3te $xx = + px - qq$

4te $xx = - px - qq$

deren Auflösungen wieder diese vier geben

1te

1te $x = + \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + qq}$

2te $x = - \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + qq}$

3te $x = + \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} - qq}$

4te $x = - \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} - qq}$.

Die Unbekannte x wird also in der ersten Gleichung = der Bekannten $\frac{p}{2}$ mehr oder weniger der Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyeckes, dessen Katheden $\frac{p}{2}$ und q sind, in der zwoten Gleichung = mehr oder weniger ebendieser Hypothenuse weniger $\frac{p}{2}$, in der dritten Gleichung = der Bekannten $\frac{p}{2}$ mehr oder weniger der Kathede des rechtwinklichten Dreyeckes, dessen Hypothenuse $\frac{p}{2}$ und dessen andere Kathede q ist, und in der vierten Gleichung = mehr oder weniger ebenjener Kathede weniger $\frac{p}{2}$.

Nimmt man daher, wenn der bejahende Werth von x auf 1.9 von 1 an gegen 9 fallen soll, für die erste Gleichung 1.2 = $\frac{p}{2}$ und zieht auf 1 . 9 die Senkrechte 1.3 = q; so wird 2.3 = $\sqrt{\frac{pp}{4} + qq}$: beschreibt man also ferner aus 2 mit dem Halbmesser 2.3 einen Halbkreis 5.3.4; so wird

Fig. 263.

1tens

1tens $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} + qq} = 1.2 + 2.4 = 1.4$

2tens $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{pp}{4} + qq} = 1.2 - 2.5 = 1.5$

Fig. 264. Die zwote Gleichung ist von der ersten nur darinn unterschieden, daß $\frac{p}{2}$ in dieser bejahend und in jener verneinend ist. Trägt man daher $1.2 = \frac{p}{2}$ auf die verneinende Seite der Unbekannten x, zieht auf 1.9 die Senkrechte $1.3 = q$, und beschreibt aus 2 mit dem Halbmesser $2.3 = \sqrt{\frac{pp}{4} + qq}$ einen Halbkreis 5.3.4; so wird

1tens $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} + qq} = -1.2 + 2.4 = 1.4$.

2tens $x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{pp}{4} + qq} = -1.2 - 2.5 = 1.5$.

Fig. 265. Nimmt man für die dritte Gleichung wieder $1.2 = \frac{p}{2}$, zieht auf 1.9 die Senkrechte $1.3 = q$, beschreibt, weil $\frac{p}{2}$ die Hypothenuse werden soll, aus 2 mit dem Halbmesser 2.1 einen Halbkreis 1.6.7.8, und zieht 3.7 gleichlaufend mit 1.9, 6.5 und 7.4 senkrecht auf 1.9; so sind 6.5 und $7.4 = q$, 2.6 und $2.7 = \frac{p}{2}$, also 2.5 und $2.4 = \sqrt{\frac{pp}{4} - qq}$; folglich wird.

1tens

1tens $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} - qq} = 1.2 + 2.4 = 1.4$,

2tens $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{pp}{4} - qq} = 1.2 - 2.5 = 1.5$.

Fig. 266. Die vierte Gleichung ist von der dritten wieder nur darinn unterschieden, daß $\frac{p}{2}$ in dieser bejahend und in jener verneinend ist. Trägt man also $1.2 = \frac{p}{2}$ auf die verneinende Seite der Unbekannten x, zieht auf 1.9 die Senkrechte $1.3 = q$, beschreibt aus 2 mit 2.1 einen Halbkreis 1.6.7.8, und zieht 3.7 gleichlaufend mit 1.9, 6.5 und 7.4 senkrecht auf 1.9; so sind wieder wie zuvor 6.5 und $7.4 = q$, 2.6 und $2.7 = \frac{p}{2}$, 2.4 und $2.5 = \sqrt{\frac{pp}{4} - qq}$, also wird

1tens $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} - qq} = -1.2 + 2.5 = 1.5$,

2tens $x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{pp}{4} - qq} = -1.2 - 2.4 = 1.4$.

Fig. 263. 264. 265. 266. **Zieht man also allgemein für alle vier Gleichungen auf 1.9 die Senkrechte $1.3 = q$, nimmt, nachdem $\frac{p}{2}$ bejahend oder verneinend ist, $1.2 = \frac{p}{2}$ auf der bejahenden oder verneinenden Seite der Unbekannten x, und beschreibt aus 2, nachdem qq**

bejahend oder verneinend ist, mit dem Halbmesser 2.3 oder 2.1 einen Halbkreis; so werden die zween Werthe der Unbekannten x auf 1.9, wenn qq bejahend ist, durch den Umfang, und, wenn qq verneinend ist, durch die Senkrechten 6.5 und 7.4 bestimmt.

Weil $\sqrt{\frac{pp}{4}+qq}$ allzeit größer, und $\sqrt{\frac{pp}{4}-qq}$ allzeit kleiner als $\frac{p}{2}$ ist; so folgt aus der Rechnung sowohl als aus der Zeichnung, daß, wenn qq bejahend ist, die Unbekannte x allzeit einen bejahenden, und einen verneinenden Werth hat, und daß, wenn qq verneinend ist, die beeden Werthe von x, nachdem $\frac{p}{2}$ bejahend oder verneinend ist, bejahend oder verneinend sind.

Ist $q=\frac{p}{2}$; so wird $\sqrt{\frac{pp}{4}-qq}=0$: und ist $q>\frac{p}{2}$; so wird $\frac{pp}{4}-qq$ verneinend, folglich $\sqrt{\frac{pp}{4}-qq}$ unmöglich. Ebendieses stimmet auch mit der Zeichnung überein.

26. Setzet man in jeder vermischten quadratischen Gleichung, in welcher xx allein ein Glied derselben ausmacht, den Coefficienten der Unbekannten $=p$, und den bekannten Ausdruck $=qq$, und sucht p und q; so wird die Gleichung allemal in eine aus den vier obigen verwandelt. Jede vermischte quadratische Gleichung kann also nach einer aus jenen vier Zeichnungen ausgeführet werden.

Ist z. B. $xx=\frac{nabx}{mc}+\frac{nabd}{mc}$

und man setzt

1tens $\frac{nb}{m} = r$, also

$$m : n = b : r$$

und sucht r; so wird

$$xx = \frac{rax}{c} + \frac{rad}{c}:$$

setzt man

2tens $\frac{ra}{c} = p$, also

$$c : r = a : p$$

und sucht p; so wird

$$xx = px + pd:$$

setzt man

3tens $pd = qq$, also

$$p : q = q : d$$

und sucht q; so wird endlich

$$xx = px + qq.$$

Welche Gleichung nach der ersten Zeichnung ausgeführet werden kann.

27. Soll man bey der Auflösung einer geometrischen Aufgabe eine Gleichung ausführen; so verfährt man einfacher und geschickter, wenn man die Zeichnung auf der gegebenen Figur selbst anbringen, und von den gegebenen Linien, wie es Nro. 10. und 13. beobachtet worden ist, so wie sie liegen, Gebrauch machen kann.

Von der Verwandlung und Eintheilung der Figuren.

28.

Soll man ein dem Dreyecke 1.2.3 gleiches Dreyeck 4.5.6, dessen Winkel 4 und Seite 4.6 gegeben sind, zeichnen, und man setzt die Höhe 3.7 = b, die Grund-

Fig. 267. 268.

Grundlinie 1.2 = a, die Höhe 6.8 = c, und die unbekannte Grundlinie 4.5 = x; so ist das Dreyeck 1.2.3 $= \frac{ab}{2}$, und das Dreyeck 4.5.6 $= \frac{cx}{2}$, also vermög der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{cx}{2} = \frac{ab}{2}$$

$$cx = ab;$$

folglich verhält sich

$$c : b = a : x.$$

Nimmt man also nach dieser Proportion 4.9 = c, 4.10 = b, 4.11 = a, und zieht 10.5 gleichlaufend mit 9.11, und noch 6.5; so wird wegen der ähnlichen Dreyecke 4.9.11 und 4.10.5, 4.5 = x, also das Dreyeck 4.5.6 dem Dreyecke 1.2.3 gleich.

Fig. 269. 270. 29. Soll das Dreyeck 1.2.3 sich zu dem Dreyecke 4.5.6 wie m : n verhalten; so verhält sich auch

$$\frac{ab}{2} : \frac{cx}{2} = m : n, \text{ oder}$$

$$ab : cx = m : n; \text{ also ist}$$

$$mcx = nab \text{ und}$$

$$x = \frac{nab}{mc} = \frac{\frac{nb}{m} \times a}{c};$$

daher verhält sich ferner

1tens $m : n = b : \frac{nb}{m}$,

2tens $c : \frac{nb}{m} = a : x$.

Nimmt man also nach der ersten Proportion 4.11 = m, 4.9 = n, 4.13 = b, und zieht 9.12 gleichlaufend mit 11.13; so wird wegen der ähnlichen Dreyecke 4.11.13, und 4.9.12, 4.12 $= \frac{nb}{m}$; und nimmt

man

man nach der zwoten Proportion $4.10 = c$, $4.14 = a$, und zieht 12.5 gleichlaufend mit 10.14; so wird, wegen der ähnlichen Dreyecke $4.10.14$ und $4.12.5$, $4.5 = x$, also $6.4.5$ das verlangte Dreyeck.

30. Ist das Dreyeck $3.2.4$ so zu zeichnen, daß das gegebene Dreyeck $1.2.3$ sich zu dem Dreyecke $3.2.4$ wie $m : n$ verhält; so verhält sich wegen der beyden Dreyecken gemeinen Höhe 3.5 Fig. 271.

$$1.2.3 : 2.4.3 = b : x,$$

und wegen der Bedingung der Aufgabe

$$1.2.3 : 2.4.3 = m : n, \text{ folglich}$$
$$m : n = b : x.$$

Nimmt man also nach dieser Proportion $1.6 = m$, $6.7 = n$, und zieht 7.4 gleichlaufend mit 6.2; so wird wegen dieser Gleichlaufenden $2.4 = x$, also $2.4.3$ das verlangte Dreyeck.

31. Ist das Dreyeck $1.2.3$ in ein gleiches $1.2.4$, welches mit jenem eine gemeine Grundlinie 1.2, und einen gegebenen Winkel $4.2.1$ hat, zu verwandeln, und man setzt die bekannte Höhe $3.5 = b$, und die unbekannte $4.6 = x$; so verhält sich wegen der beyden Dreyecken gemeinen Grundlinie Fig. 272.

$$1.2.3 : 1.2.4 = b : x.$$

Es ist aber vermög der Bedingung der Aufgabe

$$1.2.3 = 1.4.5, \text{ also auch}$$
$$b = x.$$

Zieht man daher 3.4 gleichlaufend mit 1.2, und noch 4.1; so wird das Dreyeck $1.2.4$ dem Dreyecke $1.2.3$ gleich.

32. Zieht man nach Vorigem in einem gegebenen Vielecke $abcde$ die Gerade ce, df gleichlaufend mit ce, und noch ef; so wird das Dreyeck cef dem Dreyecke ced gleich, also das Vieleck $abcde$ in ein gleiches $abcf$, welches eine Seite weniger als jenes hat, verwandelt. Und zieht man in einem gegebenen Vielecke $abcf$ durch den Scheitel e eines gegebenen Winkels aed die Gerade ec, fd gleichlaufend mit ec, und noch dc; so wird Fig. 273.

wird das Vieleck a b c f wieder in ein gleiches a b c d e, welches eine Seite mehr als jenes hat, verwandelt.

Fig. 274. 268. 33. Verwandelt man nach Vorigem ein gegebenes Viereck 1.3.7.8 in ein ihm gleiches Dreyeck 1.2.3, und zeichnet nach Nro. 28. ein dem Dreyecke 1.2.3 gleiches Dreyeck 4.5.6, dessen Winkel 4, uud Seite 4.6 gegeben sind; so wird dieses Dreyeck 4.5.6 auch dem Vierecke 1.3.7.8 gleich.

Fig. 275. 34. Soll ein Dreyeck 1.2.4, welches mit einem gegebenen Dreyecke 1.2.3 eine gemeine Grundlinie 1.2 und einen gegebenen Winkel 1.2.4 hat, so gezeichnet werden, daß das Dreyeck 1.2.3 sich zu dem Dreyecke 1.2.4 wie m : n verhält, und man setzt die bekannte Höhe 3.5 = b, und die unbekannte 4.6 = x; so verhält sich wegen der beyden Dreyecken gemeinen Grundlinie

1.2.3 : 1.2.4 = b : x.

und wegen der Bedingung der Aufgabe

1.2.3 : 1.2.4 = m : n, also auch

m : n = b : x.

Nimmt man daher nach dieser Proportion 5.8 = m, 5.7 = n, und zieht 7.9 gleichlaufend mit 8.3, 9.4 gleichlaufend mit 1.2, und noch 4.1; so wird wegen der ähnlichen Dreyecke 5.8.3 und 5.7.9, 4.6 = 5.9 = x, also 1.2.4 das verlangte Dreyeck.

Fig. 276. 35. Ist 3.4 so zu ziehen, daß das gegebene Dreyeck 1.2.3 sich zu dem Dreyecke 1.4.3 wie m:n verhält, und man setzt 1.2 = b und 1.4 = x; so verhält sich wegen der beyden Dreyecken gemeinen Höhe 3.9

1.2.3 : 1.4.3 = b : x,

und vermög der Bedingung der Aufgabe

1.2.3 : 1.4.3 = m : n, also auch

m : n = b : x.

Nimmt man daher nach dieser Proportion 1.8 = m, 1.7 = n, und zieht 7.4 gleichlaufend mit 8.2, und noch 3.4; so wird wegen der ähnlichen Dreyecke 1.8.2 und 1.7.4, 1.4 = x, also 1.4.3 das verlangte Dreyeck.

36.

36. Ist das Dreyeck $1.2.3$ in ein gleiches $1.4.5$, welches mit jenem einen gemeinen Winkel 1 und eine gegebene Grundlinie 1.4 hat, zu verwandeln, und man benennt die Seiten, wie es die Figur anzeigt; so verhält sich wegen des beyden Dreyecken gemeinen Winkels 1 Fig. 277.

$$1.2.3 : 1.4.5 = bc : ax.$$

Es ist aber vermög der Bedingung der Aufgabe

$$1.2.3 = 1.4.5, \text{ also auch}$$

$$bc = ax,$$

folglich verhält sich ferner

$$a : b = c : x.$$

Zieht man also nach dieser Proportion 2.5 gleichlaufend mit 3.4, und noch 4.5; so wird wegen der ähnlichen Dreyecke $1.3.4$ und $1.5.2$, $1.5 = x$, also das Dreyeck $1.4.5$ dem Dreyecke $1.2.3$ gleich.

Weil 2.5 mit 3.4 gleichläuft; so sind die Dreyecke $3.4.5$ und $3.4.2$ wegen der gemeinen Grundlinie 3.4 gleich; also ist die Zeichnung auch aus diesem Grunde richtig.

37. Soll das Dreyeck $1.2.3$ sich zu dem Dreyecke $1.4.5$ wie $m : n$ verhalten; so verhält sich wieder wegen des beyden Dreyecken gemeinen Winkels 1 Fig. 278.

$$1.2.3 : 1.4.5 = bc : ax,$$

und wegen der neuen Bedingung

$$1.2.3 : 1.4.5 = m : n, \text{ also auch}$$

$$m : n = bc : ax, \text{ folglich ist}$$

$$max = nbc, \text{ und}$$

$$x = \frac{nbc}{ma} = \frac{\frac{nb}{m} \times c}{a};$$

daher verhält sich ferner

1tens $\quad m : n = b : \frac{nb}{m}$, und

2tens $\quad a : \frac{nb}{m} = c : x.$

Nimmt

Nimmt man also nach der ersten Proportion $1.8 = m$, $1.7 = n$, und zieht 7.9 gleichlaufend mit 8.2; so wird wegen der ähnlichen Dreyecke $1.8.2$ und $1.7.9$, $1.9 = \frac{nb}{m}$: und zieht man nach der zwoten Proportion 9.5 gleichlaufend mit 4.3, und noch 5.4; so wird wegen der ähnlichen Dreyecke $1.3.4$ und $1.5.9$, $1.5 = x$, also $1.4.5$ das verlangte Dreyeck.

Zieht man nach Nro. 35. die Gerade 3.9, so, daß das Dreyeck $1.2.3$ sich zu dem Dreyecke $1.9.3$ wie $m : n$ verhält, und verwandelt nach Nro. 36. das Dreyeck $1.9.3$ in ein ihm gleiches $1.4.5$; so kömmt wieder die vorige Zeichnung zum Vorschein.

Fig. 279. 38. Soll die mit der Seite 2.3 eines gegebenen Dreyeckes $1.2.3$ gleichlaufende Gerade 4.5 so gezogen werden, daß das Dreyeck $1.2.3$ sich zu dem Dreyecke $1.4.5$ wie $m : n$ verhält; und man setzt $1.2 = b$ und $1.4 = x$; so verhält sich, weil die Dreyecke $1.2.3$ und $1.4.5$ ähnlich sind,

$$1.2.3 : 1.4.5 = bb : xx,$$

und wegen der Bedingung der Aufgabe

$$1.2.3 : 1.4.5 = m : n, \text{ also}$$
$$m : n = bb : xx; \text{ folglich ist}$$
$$mxx = nbb$$
$$xx = \frac{nbb}{m} = \frac{nb}{m} \times b;$$

daher verhält sich ferner

$$\text{1tens} \quad m : n = b : \frac{nb}{m} \quad \text{und}$$

$$\text{2tens} \quad b : x = x : \frac{nb}{m}.$$

Nimmt man also nach der ersten Proportion $1.8 = m$, $1.7 = n$, und zieht 7.9 gleichlaufend mit 8.2; so wird wegen der ähnlichen Dreyecke $1.8.2$ und $1.7.9$,

1.9

$1.9 = \frac{nb}{m}$: und beschreibt man nach der zwoten Proportion auf 1.2 einen Halbkreis, und zieht die Senkrechte 9.6; so wird nach Nro. 12. $1.6 = x$; also giebt der aus 1 beschriebene Bogen 6.4 den Punkt 4, und die mit 2.3 Gleichlaufende 4.5 das verlangte Dreyeck 1.4.5.

39. Ist das Dreyeck 1.2.3 in ein gleiches 1.4.5, dessen Seite 4.5 mit einer gegebenen Geraden 20.21 gleichläuft, zu verwandeln, und man zieht, um die Lage dieser Geraden mit dem Dreyecke zu verbinden, 3.0 gleichlaufend mit 20.21; so verhält sich, weil die Dreyecke 1.2.3 und 1.0.3 eine gemeine Höhe haben, Fig. 280.

$$1.0.3 : 1.2.3 = a : b$$

also auch, weil 1.2.3 und 1.4.5 vermög der Bedingung der Aufgabe gleich sind,

$$1.0.3 : 1.4.5 = a : b$$

und, weil die Dreyecke 1.0.3 und 1.4.5 ähnlich sind,

$$1.0.3 : 1.4.5 = aa : xx, \text{ also}$$

$$a : b = aa : xx$$

$$1 : b = a : xx; \text{ folglich ist}$$

$$xx = ab;$$

daher verhält sich ferner

$$a : x = x : b.$$

Beschreibt man also nach dieser Proportion auf 1.0 einen Halbkreis und zieht die Senkrechte 2.6; so wird, nach Nro. 12, $1.6 = x$; also giebt der aus 1 beschriebene Bogen 6.4 den Punkt 4, und die mit 20.21 Gleichlaufende 4.5 das verlangte Dreyeck 1.4.5.

40. Soll das Dreyeck 1.2.3 sich zu dem Dreyecke 1.4.5 wie m : n verhalten; so verhält sich wieder, weil die Dreyecke 1.0.3 und 1.2.3 eine gemeine Höhe haben, Fig. 281.

$$1.0.3 : 1.2.3 = a : b$$

und wegen der neuen Bedingung

$$1.2.3 : 1.4.5 = m : n.$$

Es ist aber jedes Verhältniß 1.0.3 : 1.4.5 aus den mittlern Verhältnissen 1.0.3 : 1.2.3 : und 1.2.3 : 1.4.5 zusammengesetzet Nro. 202. Rechenk.

also

also verhält sich

$$1.0.3 : 1.4.5 = ma : nb,$$

und, weil die Dreyecke 1.0.3 und 1.4.5 ähnlich sind,

$$1.0.3 : 1.4.5 = aa : xx, \text{ also}$$

$$ma : nb = aa : xx$$

$$m : nb = a : xx; \text{ folglich ist}$$

$$mxx = nba$$

$$xx = \frac{nba}{m} = \frac{nb}{m} \times a;$$

daher verhält sich ferner

1tens $m : n = b : \frac{nb}{m}$ und

2tens $a : x = x : \frac{nb}{m}$.

Nimmt man also nach der ersten Proportion 1.8 = m, 1.7 = n und zieht 7.9 gleichlaufend mit 8.2; so wird wegen der ähnlichen Dreyecke 1.8.2 und 1.7.9, $1.9 = \frac{nb}{m}$: und beschreibt man nach der zwoten Proportion auf 1.0 einen Halbkreis und zieht die Senkrechte 9.6; so wird nach Nro. 12, 1.6 = x; also giebt der aus 1 beschriebene Bogen 6.4 den Punkt 4, und die mit 20.21 Gleichlaufende 4.5 das verlangte Dreyeck 1.4.5.

Man erhält ebendiese Zeichnung, wenn man nach Nro. 35. die Gerade 3.9 so zieht, daß das Dreyeck 1.2.3 sich zu dem Dreyecke 1.9.3 wie m : n verhält, und sodann nach Nro. 39, das Dreyeck 1.9.3 in ein gleiches 1.4.5, dessen Seite 4.5 mit 20.21 gleichläuft, verwandelt.

Fig. 282. 41. Ist das Dreyeck 1.2.3 in ein gleiches 1.4.5, dessen Seite 4.5 durch einen Punkt 6 außer dem Dreyecke 1.2.3 geht, zu verwandeln, und man zieht, um diesen Punkt 6 mit den Seiten des Dreyeckes 1.2.3 zu verbinden, die Gerade 6.7 gleichlaufend mit einer Seite 1.3, bis

bis sie eine andere 1.2 in einem Punkte 7 begegnet; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 4.1.5 und 4.7.6

$x + d : x = c : y$, also ist

$$y = \frac{cx}{x+d},$$

und wegen der beyden Dreyecken 1.2.3 und 1.4.5 gemeinen Winkels 1

$$1.2.3 : 1.4.5 = ab : xy.$$

Es ist aber vermög der Bedingung der Aufgabe 1.2.3 = 1.4.5, also auch

$$ab = xy \text{ und}$$

$$y = \frac{ab}{x}, \text{ folglich}$$

$$\frac{cx}{x+d} = \frac{ab}{x}$$

$$cxx = abx + abd$$

$$xx = \frac{abx}{c} + \frac{abd}{c},$$

Setzt man daher

1tens $\frac{ab}{c} = p$, also

$$ab = cp \text{ und}$$

$$c : b = a : p,$$

zieht folglich 6.8 gleichlaufend mit 1.7, und 3.9 gleichlaufend mit 8.2; so wird 1.8 = c,

$$1.9 = \frac{ab}{c} = p, \text{ und}$$

$$xx = px + pd.$$

Setzt man

2tens $pd = qq$, also

$$p : q = q : d,$$

beschreibt folglich auf 7.9 einen Halbkreis, und zieht die Senkrechte 1.10; so wird nach Nro. 12, 1.10 = q,

$$xx = px + qq \text{ und}$$

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + qq}.$$

Halbirt man also, nach Nro. 25, 1.9 in 11, beschreibt aus 11 mit dem Halbmesser 11.10 $= \sqrt{\frac{pp}{4} + qq}$ einen Halbkreis 4.10.12, und zieht durch die Punkte 4 und 12 die Geraden 6.4 und 6.13; so wird

$$1.4 = x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} + qq} \text{ und}$$

$$1.12 = x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{pp}{4} + qq},$$

also sowohl das Dreyeck 1.12.13, als das Dreyeck 1.4.5 dem Dreyecke 1.2.3 gleich

Man erhält ebendiese Zeichnung, wenn man das Dreyeck 1.2.3 in ein gleiches 1.12.13, dessen Seite 12.13 durch ebenjenen Punkt 6 geht, verwandelt. Denn nimmt man 1.12 = u als bejahend an; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 13.12.1 und 6.12.7

$$d - u : u = c : z, \text{ also ist}$$

$$z = \frac{cu}{d - u},$$

und wegen der in den Dreyecken 1.2.3 und 1.12.13 gleichen Winkel bey 1,

$$1.2.3 : 1.12.13 = ab : zu.$$

Es ist aber vermög der Bedingung der Aufgabe 1.2.3 = 1.12.13, also auch

$$ab = uz \text{ und}$$

$$z = \frac{ab}{u}, \text{ folglich}$$

$$\frac{cu}{d - u} = \frac{ab}{u}$$

$$cuu = abd - abu$$

$$uu = -\frac{abu}{c} + \frac{abd}{c}.$$

Setzt man daher

1tens $\frac{ab}{c} = p$, also

$ab = cp$ und

$c : b = a : p$,

zieht folglich 6.8 gleichlaufend mit 1.7, 3.9 gleichlaufend mit 8.2; so wird 1.8 = c.

$$1.9 = \frac{ab}{c} = p, \text{ und}$$

$$uu = - pu + pd.$$

Setzt man

2tens $pd = qq$, also

$p : q = q : d$,

beschreibt folglich auf 7.9 einen Halbkreis und zieht die Senkrechte 1.10; so wird 1.10 = q,

$$uu = - pu + qq, \text{ und}$$

$$u = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + qq}.$$

Halbirt man also, nach Nro. 25, 1.9 in 11, beschreibt aus 11 mit dem Halbmesser $11.10 = \sqrt{\frac{pp}{4} + qq}$ einen Halbkreis 4.10.12, und zieht durch die Punkte 4 und 12 die Geraden 6.4 und 6.13; so wird

$$1.4 = u = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{pp}{4} + qq} \text{ und}$$

$$1.12 = u = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} + qq},$$

also wie zuvor sowohl das Dreyeck 1.4.5, als das Dreyeck 1.12.13 dem Dreyecke 1.2.3 gleich.

42.

42. Soll das Dreyeck 1.2.3 sich zu dem Dreyecke 1.4.5 wie m : n verhalten; so verhält sich wieder, wegen der ähnlichen Dreyecke 4.1.5 und 4.7.6,

$$x + d : x = c : y, \text{ also ist}$$

$$y = \frac{cx}{x + d},$$

wegen des beyden Dreyecken 1.2.3 und 1.4.5 gemeinen Winkels 1,

$$1.2.3 : 1.4.5 = ab : xy$$

uud wegen der neuen Bedingung

$$1.2.3 : 1.4.5 = m : n, \text{ also auch}$$

$$m : n = ab : xy; \text{ folglich ist}$$

$$mxy = nab \text{ und}$$

$$y = \frac{nab}{mx}, \text{ also}$$

$$\frac{cx}{x + d} = \frac{nab}{mx}$$

$$mcxx = nabx + nabd$$

$$xx = \frac{nabx}{mc} + \frac{nabd}{mc}.$$

Setzt man daher

$$1\text{tens} \quad \frac{nb}{m} = r, \text{ also}$$

$$nb = mr, \text{ und}$$

$$m : n = b : r$$

theilt folglich 1.3 in 14, so, daß 1.3 sich zu 1.14 wie m : n verhält; so wird

$$1.14 = \frac{nb}{m} = r \text{ und}$$

$$xx = \frac{rax}{c} + \frac{rad}{c}$$

Setzt man daher

$$2\text{tens} \quad \frac{ra}{c} = p, \text{ also}$$

$ra = cp$ und

$c : r = a : p$,

zieht folglich 6.8 gleichlaufend mit 1.7, und 14.9 gleichlaufend mit 8.2; so wird

$1.8 = c$, $1.9 = p$ und

$xx = px + pd$.

Setzt man 3tens $pd = qq$, also

$p : q = qd$,

beschreibt folglich auf 7.9 einen Halbkreis und zieht die Senkrechte 1.10; so wird, nach Nro. 12, $1.10 = q$,

$xx = px + qq$ und

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + qq}.$$

Halbirt man also 1.9 in 11, beschreibt aus 11 mit dem Halbmesser $11.10 = \sqrt{\frac{pp}{4} + qq}$ einen Halbkreis 4.10.12, und zieht durch die Punkte 4 und 12 die Geraden 6.4 und 6.13; so wird

$$1.4 = x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} + qq} \text{ und}$$

$$1.22 = x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{pp}{4} + qq};$$

also ist sowohl 1.12.13 als 1.4.5 das verlangte Dreyeck.

Ebendiese Zeichnung kömmt auch zum Vorschein, wenn man nach Nro. 35. die Gerade 2.14 so zieht, daß das Dreyeck 1.2.3 sich zu dem Dreyecke 1.2.14 wie $m : n$ verhält, und sodann nach Nro. 41. das Dreyeck 1.2.14 in ein gleiches 1.4.5, dessen Seite 4.5 durch ebenjenen Punkt 6 geht, verwandelt.

43. Ist das Dreyeck 1.2.3 in ein gleiches 1.4.5, dessen Seite 4.5 durch einen Punkt 6 innerhalb des Dreyeckes 1.2.3 geht, zu verwandeln, und man zieht, um diesen Punkt 6 mit den Seiten des Dreyeckes 1.2.3 zu verbinden, die Gerade 6.7 gleichlaufend mit einer Seite 1.3, bis

Fig. 284.

bis sie eine andere 1.2 in einem Punkte 7 begegnet; so verhält sich, wegen der ähnlichen Dreyecke 4.1.5 und 4.7.6,

$$x - d : x = c : y, \text{ also ist}$$

$$y = \frac{cx}{x-d}$$

und wegen des beyden Dreyecken 1.2.3 und 1.4.5 gemeinen Winkels 1

$$1.2.3 : 1:4.5 = ab : xy.$$

Es ist aber vermög der Bedingung der Aufgabe 1.2.3 = 1.4.5, also auch

$$ab = xy \text{ und}$$

$$y = \frac{ab}{x}, \text{ folglich}$$

$$\frac{cx}{x-d} = \frac{ab}{x}$$

$$cxx = abx - abd$$

$$xx = \frac{abx}{c} - \frac{abd}{c}.$$

Setzt man daher

1tens $\frac{ab}{c} = p$, also

$$ab = cp \text{ und}$$

$$c : b = a p,$$

zieht folglich 6.8 gleichlaufend mit 1.7, und 3.9 gleichlaufend mit 8.2; so wird 1.8 = c, 1.9 = p, und

$$xx = px - pd.$$

Setzt man

2tens $pd = qq$, also

$$p : q = q : d,$$

beschreibt folglich auf 1.9 einen Halbkreis, und zieht die Senkrechte 7.10; so wird, nach Nro. 12, 1.10 = q,

$$xx = px - qq \text{ und}$$

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} - qq}.$$

Be-

Beschreibt man also aus 1 einen Bogen 10.11, und zieht 1.11 senkrecht auf 1.2, 11.13 gleichlaufend mit 1.2, 13.4 und 12.15 senkrecht auf 1.2 und durch den Punkt 6 die Geraden 4.5 und 15.16; so wird 4.13 $=$

$15.12 = 1.11 = q$, $14.12 = 14.13 = \frac{p}{2}$, also

$14.15 = 14.4 = \sqrt{\frac{pp}{4} - qq}$, folglich nach Nro. 25.

$$1.4 = x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} - qq}, \text{ und}$$

$$1.15 = x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{pp}{4} - qq};$$

also sind die Dreyecke 1.4.5 und 1.15.16 dem Dreyecke 1.2.3 gleich.

44. Soll das Dreyeck 1.2.3 sich zu dem Dreyecke 1.4.5 wie $m : n$ verhalten; so verhält sich wieder wegen der ähnlichen Dreyecke 4.1.5 und 4.7.6 (Fig. 285.)

$$x - d : x = c : y, \text{ also ist}$$

$$y = \frac{cx}{x - d},$$

wegen des beyden Dreyecken 1.2.3 und 1.4.5 gemeinen Winkels 1

$$1.2.3 : 1.4.5 = ab : xy$$

und wegen der neuen Bedingung

$$1.2.3 : 1.4.5 = m : n, \text{ also}$$

$$m : n = ab : xy, \text{ folglich ist}$$

$$mxy = nab$$

$$y = \frac{nab}{mx}, \text{ also}$$

$$\frac{cx}{x - d} = \frac{nab}{mx}$$

$$mcxx = nabx - nabd$$

$$xx = \frac{nabx}{mc} - \frac{nabd}{mc}.$$

Setzt man daher

$$1\text{tens}\quad \frac{nb}{m} = r,\ \text{also}$$

$$nb = mr \text{ und}$$

$$m : n = b : r,$$

theilt folglich 1.3 in 17 so, daß 1.3 sich zu 1.17 wie m : n verhält; so wird

$$1.17 = \frac{nb}{m} = 1,\ \text{und}$$

$$xx = \frac{rax}{c} - \frac{rad}{c}.$$

Setzt man

$$2\text{tens}\quad \frac{ra}{c} = p,\ \text{also}$$

$$ra = cp \text{ und}$$

$$c : r = a : p,$$

zieht folglich 6.8 gleichlaufend mit 1.7, und 17.9 gleichlaufend mit 8.2; so wird 1.8 = c, 1.9 = p und

$$xx = px - pd.$$

Setzt man

$$3\text{tens}\quad pd = qq,\ \text{also}$$

$$p : q = q : d,$$

beschreibt folglich auf 1.9 einen Halbkreis und zieht die Senkrechte 7.10; so wird, nach Nro. 12, 1.10 = q,

$$xx = px - qq \text{ und}$$

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} - qq}.$$

Beschreibt man also aus 1 einen Bogen 10.11, und zieht 1.11 senkrecht auf 1.2, 11.13 gleichlaufend mit 1.2, 13.4 und 12.15 senkrecht auf 1.2, und durch den Punkt 6 noch die Geraden 4.5 und 15.16; so wird 13.4 = 12.15 = 1.11 = q, 14.12 = 14.13 = $\frac{p}{2}$,

$\frac{p}{2}$, also $14.4 = 14.15 = \sqrt{\frac{pp}{4} - qq}$, folglich nach Nro. 35.

$$1.4 = x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} - qq} \text{ und}$$

$$1.15 = x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{pp}{4} - qq};$$

also ist sowohl 1.15.16, als 1.4.5 das verlangte Dreyeck.

Man erhält ebendiese Zeichnung, wenn man nach Nro. 35. die Gerade 2.17 so zieht, daß das Dreyeck 1.2.3 sich zu dem Dreyecke 1.2.17 wie m : n verhält, und sodann nach Nro. 33. das Dreyeck 1.2.17 in ein gleiches 1.4.5, dessen Seite 4.5 durch ebenjenen Punkt 6 geht, verwandelt.

45. Theilt man die Grundlinie 1.2 des Dreyeckes 1.2.3 in den Punkten 4, 5, 6 nach einem gegebenen Verhältnisse p : q : r : s, und zieht die Geraden 3.4, 3.5, 3.6; so verhalten sich die Dreyecke 3.1.4, 3.4.5, 3.5.6 und 3.6.2 wegen ihrer gemeinen Höhe 3.7 wie die Grundlinien 1.4, 4.5, 5.6 und 6.2, also wie p : q : r : s. Fig. 286.

Theilt man also die Grundlinie eines Dreyeckes nach einem gegebenen Verhältnisse, und zieht durch die Theilungspunkte in den entgegengesetzten Scheitel gerade Linien; so theilen diese das Dreyeck nach demselben Verhältnisse.

46. Theilt man ein Dreyeck 1.2.3 durch 3.4, 3.5, 3.6 nach dem Verhältnisse p : q : r : s, und verwandelt durch gerade Linien, welche durch den Punkt o gehen, nach Nro. 36. das Dreyeck 1.2.3 in ein gleiches 1.o.7, das Dreyeck 1.5.3 in ein gleiches 1.o.8, und das Dreyeck 2.6.3 in ein gleiches 2.o.9; so theilen die Geraden o.7, o.8, und o.9 das Drey- Fig. 287.

eck 1.2.3 ebenso wie die Geraden 3.4, 3.5 und 3.6 dasselbe theilen.

Ein Dreyeck 1.2.3 wird also durch gerade Linien 0.7, 0.8, 0.9, welche durch einen Punkt o einer Seite 1.2 desselben gehen, nach einem gegebenen Verhältnisse p:q:r:s getheilt, wenn man die Seite 1.2 in den Punkten 4, 5, 6 nach ebendiesem Verhältnisse theilt, 4.7, 5.8, 6.9 gleichlaufend mit 3.0, und endlich 0.7, 0.8 und 0.9 zieht.

Fig. 288. 47. Theilt man das Dreyeck 1.2.3 durch 3.4, 3.5, 3.6 nach dem Verhältnisse p:q:r:s, und verwandelt durch gerade Linien ab, cd und ef, welche mit der Seite 2.3 gleichlaufen, nach Nro. 39. das Dreyeck 1.4.3 in ein gleiches 1.ba, das Dreyeck 1.5.3 in ein gleiches 1.dc, und das Dreyeck 1.6.3 in ein gleiches 1.fe; so theilen die Geraden ab, cd und ef das Dreyeck 1.2.3 ebenso wie die Geraden 3.4, 3.5 und 3.6 dasselbe theilen.

Ein Dreyeck 1.2.3 wird also durch gerade Linien ab, cd und ef, welche mit einer Seite 2.3 gleichlaufen, nach einem gegebenen Verhältnisse p:q:r:s getheilt, wenn man 1tens 1.2 in den Punkten 4, 5, 6 nach ebendiesem Verhältnisse theilt, 2tens auf 1.2 einen Halbkreis beschreibt und die Senkrechten 4.7, 5.8, 6.9 zieht, 3tens aus 1 die Bögen 7.b, 8.d, 9.f beschreibt, und endlich ba, dc und fe mit 2.3 gleichlaufend zieht.

Fig. 289. 48. Nach vorigem Verfahren wird das Trapez a.3 2.b durch cd und ef nach dem Verhältnisse q:r:s getheilt.

Ein Trapez a.3.2.b wird also durch gerade Linien cd und ef, welche mit den gleichlaufenden Seiten desselben gleichlaufen, nach einem gegebenen Verhältnisse q:r:s getheilt, wenn man 1tens die Seiten desselben 3.a und 2.b bis in ihren Durchschnitt 1 verlängert, 2tens auf 1.2 einen Halbkreis, und aus 1 den Bogen b.7 beschreibt und 7.4 senkrecht auf 1.2 zieht, 3tens 4.2 in den Punkten 5, 6 nach dem Verhältnisse q:r:s

theilt,

theilt, und auf 1 . 2 die Senkrechten 5 . 8 , 6 . 9 zieht, 4tens aus 1 die Bögen 8.d, 9.f beschreibt, und endlich dc und fe mit 2 . 3 gleichlaufend zieht.

49. Ist 3 . a mit 2 . b gleichlaufend; so ist das Viereck a . 3 . 2 b ein Parallelogramm. Dieses wird durch gerade Linien c d und e f, welche mit einer Seite ab desselben gleichlaufen, nach einem gegebenen Verhältnisse q : r : s getheilt, wenn man die Grundlinie 2 . b in den Punkten d, f nach ebendiesem Verhältnisse theilt, und sodann d c und f e mit a b gleichlaufend zieht. Denn weil diese Theile wieder Parallelogrammen von gleicher Höhe sind; so verhalten sie sich wie ihre Hälften die Dreyecke c b d, e d f und 3 . f 2, folglich wie ihre Grundlinien b d, d f und f . 2. Fig. 290.

50. Theilt man das Dreyeck 1 . 2 . 3 durch 3 . 4, 3 . 5, 3 . 6 nach dem Verhältnisse p : q : r : s und verwandelt durch gerade Linien a b, c d und e f, welche mit einer gegebenen Geraden 20 . 21 gleichlaufen, nach Nro. 39, das Dreyeck 1 . 4 . 3 in ein gleiches 1 . b a, das Dreyeck 1 . 5 . 3 in ein gleiches 1 . d c, und das Dreyeck 2 . 6 . 3 in ein gleiches 2 . f e; so theilen die Geraden a b, c d, e f das Dreyeck 1 . 2 . 3 ebenso wie die Geraden 3 . 4, 3 . 5, 3 . 6 dasselbe theilen. Fig. 291.

Ein Dreyeck 1 . 2 . 3 wird also durch gerade Linien a b, c d, e f, welche mit einer gegebenen Geraden 20 . 21 gleichlaufen, nach einem gegebenen Verhältnisse p : q : r : s getheilt; wenn man 1tens 3 o mit 20 . 21 gleichlaufend zieht, und auf 1 . o und o . 2 Halbkreise beschreibt, 2tens 1 . 2 in den Punkten 4, 5, 6 nach dem gegebenen Verhältnisse theilt und auf 1 . 2 die Senkrechten 4 . 7, 5 . 8, 6 . 9 zieht, 3tens aus 1 die Bögen 7 . b, 8 . d und aus 2 den Bogen 9 . f beschreibt, und endlich a b, c d, e f mit 3 . o gleichlaufend zieht.

51. Theilt man das Dreyeck 1 . 2 . 3 durch 2 . 4, 2 . 5, 2 . 6 nach dem Verhältnisse p : q : r : s, und verwandelt durch gerade Linien o b, o d, o f, welche durch einen Punkt o in der Verlängerung der Seite 2 . 3 gehen, Fig. 292.

gehen, nach Nro. 41. das Dreyeck 1.2.4 in ein gleiches 1.ba, das Dreyeck 1.2.5 in ein gleiches 1.dc, und das Dreyeck 1.2.6 in ein gleiches 1.fe; so theilen die Geraden ob, od und of das Dreyeck 1.2.3 ebenso wie die Geraden 2.4, 2.5 und 2.6 dasselbe theilen.

Ein Dreyeck 1.2.3 wird also durch gerade Linien, welche durch einen Punkt o einer Seite 2.3 gehen, nach einem gegebenen Verhältnisse p:q:r:s getheilt; wenn man 1tens 1.3 in den Punkten 4, 5, 6 nach ebendiesem Verhältnisse theilt, 2tens o.7 mit 1.3, o.8 mit 1.7, sodann 4.9, 5.10, und 6.11 mit 8.2 gleichlaufend zieht, 3tens auf 7.9, 7.10, 7.11 Halbkreise beschreibt, und die Senkrechte 1.14 zieht, 4tens 1.9 in x, 1.10 in y, 1.11 in u halbirt, aus x den Bogen 12.b, aus y den Bogen 13.d, aus u den Bogen 14.f beschreibt, und endlich die Geraden ob, od und of zieht.

Fig. 293. 52. Nach vorigem Verfahren wird das Viereck a.3.2.b nach dem Verhältnisse q:r:s getheilt.

Verlängert man also 1tens die Seiten 3.a und 2.b, bis sie sich in einem Punkte 1 schneiden, und verwandelt nach Nro. 36. das Dreyeck 1.ba in ein gleiches 1.2.4, theilt 2tens das Dreyeck 4.2.3 durch 2.5, 2.6 nach dem Verhältnisse q:r:s und verwandelt 3tens durch gerade Linien od, of nach Nro. 41. das Dreyeck 1.2.5 in ein gleiches 1.dc, und das Dreyeck 1.2.6 in ein gleiches 1.fe; so theilen die Geraden od, of das Viereck a.3.2.b ebenso, wie die Geraden 2.5, 2.6 das ihm gleiche Dreyeck 4.2.3 theilen.

Ein Trapezoid a.3.2.b wird also durch gerade Linien, welche durch den Durchschnitt o zwoer Seiten ba und 2.3 gehen, nach einem gegebenen Verhältnisse q:r:s getheilt; wenn man 1tens die zwo übrigen Seiten 3.a und 2.b bis in ihren Durchschnitt 1 verlängert, b.4 mit 2.a gleichlaufend zieht, und 4.3 in den Punkten 5, 6 nach dem gegebenen Verhältnisse q:r:s theilt, 2tens o7 mit 1.3, o.8 mit 1.7, sodann 5.10

und

und 6.11 mit 8.2 gleichlaufend zieht, 3tens auf 7.10, 7.11 Halbkreise beschreibt, und die Senkrechte 1.14 zieht, 4tens 1.10 in y, 1.11 in u halbirt, aus y den Bogen 13.d, aus u den Bogen 14.f beschreibt, und endlich die Geraden od und of zieht.

53. Ist 3.a mit 2.b gleichlaufend; so ist das Viereck a.3.2.b ein Trapez. Dieses wird durch gerade Linien od, of, welche durch den Durchschnitt o der nicht gleichlaufenden Seiten desselben ba und 2.3 gehen, nach einem gegebenen Verhältnisse q : r : s getheilt, wenn man die Grundlinie b.2 in den Punkten d, f nach ebendiesem Verhältnisse theilt, und noch die Geraden od und of zieht. Denn weil die Grundlinien ac, ce, e.3 sich wie die Grundlinien bd, df, f.2 verhalten; so verhalten sich sowohl die Dreyecke oac, oce, oe.3, als die Dreyecke obd, odf, of.2 wie q : r : s; also verhalten sich auch die Unterscheide dieser Dreyecke die Trapeze abdc, cdfe, ef.2.3 wie q : r : s. Fig. 294.

54. Theilt man das Dreyeck 1.2.3 durch 2.4, 2.5 nach dem gegebenen Verhältnisse p : q : r, und verwandelt durch gerade Linien ob, od welche durch den Punkt o gehen, nach Nro. 41. das Dreyeck 1.2.4 in ein gleiches 1.ba, und das Dreyeck 3.2.5 in ein gleiches 3.d.c; so theilen die Geraden ob, od das Dreyeck 1.2.3 ebenso, wie die Geraden 2.4, 2.5 dasselbe theilen. Fig. 295.

Ein Dreyeck 1.2.3 wird also durch gerade Linien, ob, od, welche durch einen Punkt o außer dem Dreyecke und inner einem Winkel desselben 3.2.1 gehen, nach einem gegebenen Verhältnisse p : q : r getheilt; wenn man 1tens 1.3 in den Punkten 4, 5 nach ebendiesem Verhältnisse theilt, 2tens 9.0.8 mit 1.3, 0.6 mit 1.8, 0.7 mit 3.9, sodann 4.10 mit 6.2 und 5.11 mit 7.2 gleichlaufend zieht, 3tens auf 8.10 und 9.11 Halbkreise beschreibt, und die Senkrechten 1.12 und 3.13 zieht, 4tens 1.10 in x, 3.11 in y halbirt, aus x den Bogen 12.b, aus y den Bogen 13.d beschreibt, und endlich ob und od zieht.

Fig. 296. 55. Zieht man durch den gegebenen Punkt o die Gerade o.3.4, theilt das Dreyeck 1.2.3 nach Nro. 236. durch die Geraden 4.6, 4.7 nach dem Verhältnisse p : q : r, und verwandelt durch die Geraden ob, od nach Nro. 231. das Dreyeck 1.4.6 in ein gleiches 1.ba, und das Dreyeck 2.4.7 in ein gleiches 2.dc; so theilen die Geraden ob, od das Dreyeck 1.2.3 ebenso, wie die Geraden 4.6, 4.7 dasselbe theilen.

Ein Dreyeck 1.2.3 wird also durch gerade Linien ob, od, welche durch einen Punkt o außer dem Dreyecke und inner einem an der Spitze entgegengesetzten Winkel desselben gehen, nach einem gegebenen Verhältnisse p : q : r getheilt; wenn man 1tens die Seite 1.2 in den Punkten 8, 9 nach ebendiesem Verhältnisse theilt, 2tens 8.6, 9.7 mit o.3.4, o.10 mit 1.3, o.11 mit 2.3, 12.o.13 mit 1.2, sodann 6.14 mit 12.4, 7.15 mit 13.4 gleichlaufend zieht, 3tens auf 10.14, 11.15 Halbkreise beschreibt und die Senkrechten 1.16, 2.17 zieht, 4tens 1.4 in x, 2.15 in y halbirt, aus x den Bogen 16.b, aus y den Bogen 17.d beschreibt, und endlich o b und o d zieht.

Fig. 297. 56. Soll endlich das Dreyeck 1.2.3 durch gerade Linien, welche durch den Punkt o innerhalb des Dreyeckes gehen, von der Geraden oa an nach dem gegebenen Verhältnisse p:q:r:s getheilt werden, und man zeichnet 1tens nach Nro. 29. das Dreyeck oab, so, daß das Dreyeck 1.2.3 sich zu dem Dreyecke oab wie p+q+r+s : p verhält; so wird das Dreyeck oab der erste Theil; zeichnet man 2tens nach Nro. 30. das Dreyeck ob.4, so, daß das Dreyeck oab sich zu dem Dreyecke ob.4 wie p : q verhält und verwandelt nach Nro. 32. das Dreyeck ob.4 in ein ihm gleiches Viereck ob.2.c; so wird dieses Viereck der zweyte Theil: zeichnet man 3tens nach Nro. 30. das Dreyeck oa.5, so, daß das Dreyeck oab sich zu dem Dreyecke oa.5 wie p : s verhält, und verwandelt nach Nro. 32. das Dreyeck oa.5 in ein ihm gleiches Viereck oa.1.d; so wird dieses Viereck der vierte, also das Vier-

eck

eck o d . 3 . c der dritte Theil; folglich sind die Geraden oa, ob, oc, od die verlangten Theilungslinien.

57. Zieht man aus jedem Punkte o des Perimeters eines Vieleckes in die Scheitel desselben die Geraden 0.2, 0.3, 0.4, nimmt in einem Schenkel eines beliebigen Winkels 6.7.11 einen Punkt 6 an, und zeichnet nach Nro. 28. das Dreyeck 6.7.8 dem Dreyecke 0.1.2, das Dreyeck 6.8.9 dem Dreyecke 0.2.3 das Dreyeck 6.9.10 dem Dreyecke 0.3.4 und das Dreyeck 6.10.11 dem Dreyecke 0.4.5 gleich; so wird das Dreyeck 6.7.11 dem Vielecke gleich, und durch die Geraden 6.8, 6.9, 6.10 ebenso wie das Vieleck durch die Geraden 0.2, 0.3, 0.4 getheilt. Fig. 298. 299. 300.

Theilt man also nach 45. das Dreyeck 6.7.11 durch die Geraden 6.a, 6.b, 6.c nach einem gegebenen Verhältnisse p : q : r : s, sodann 2.3 in A, 3.4 in B, 4.5 in C, wie 8.9 in a, 9.10 in b, 10.11 in c getheilt ist, und zieht die Geraden oA, oB, oC; so theilen diese auch das Vieleck nach dem gegebenen Verhältnisse.

Denn, vermög dieser Zeichnung verhält sich

1tens 0.2.3 : 0.2.A = 6.8.9 : 6.8.a;
es ist aber 0.2.3 = 6.8.9, also
auch 0.2.A = 6.8.a und
0.A.3 = 6.a.9:

2tens 0.3.4 : 0.3.B = 6.9.10 : 6.9.b;
es ist aber 0.3.4 = 6.9.10, also auch
0.3.B = 6.9.b und
0.B.4 = 6.b.10:

3tens 0.4.5 : 0.4.C = 6.10.11 : 6.10.c;
es ist aber 0.4.5 = 6.10.11, also auch
0.4.C = 6.10.c und
0.C.5 = 6.c.11, u. s. f.;

also sind die Theile des Vieleckes derselben Ordnung nach den Theilen des Dreyeckes 6.7.11 gleich, folglich wird das Vieleck durch oA, oB und oC ebenso wie das

ihm

ihm gleiche Dreyeck 6.7.11 durch 6.a, 6.b und 6.c getheilt.

Fig. 298. 301. 58. Zieht man aus jedem Punkte o innerhalb eines Vieleckes in die Scheitel desselben die Geraden o.1, o.2, o.3, o.4, zeichnet die Dreyecke 6.7.8, 6.8.9, 6.9.10, 6.10.11 den Dreyecken o.1.2, o.2.3, o.3.4, o.4.1 gleich, theilt 7.11 in den Punkten a, b, c nach einem gegebenen Verhältnisse p : q : r : s, sodann 2.3 in A, 3.4 in B, 4.1 in C, wie 8.9 in a, 9.10 in b, 10.11 in c getheilet ist, und zieht die Geraden oA, oB, oC; so theilen diese das Vieleck nach dem gegebenen Verhältnisse.

Fig. 298. 302. 59. Zieht man durch einen Punkt o außer einem Vielecke durch die Scheitel desselben die Geraden o.14, o.5, o.4; so theilen diese das Vieleck in Dreyecke, Trapezoiden und Trapezen ein.

Zeichnet man also nach Nro. 28. 33. das Dreyeck 6.7.8 dem Dreyecke 2.14.1, das Dreyeck 6.8.9 dem Trapezoide 2.14.5.12, das Dreyeck 6.9.10 dem Trapeze 12.5.4.13 und das Dreyeck 6.10.11 dem Dreyecke 13.4.3 gleich, theilt nach Nro. 45. das Dreyeck 6.7.11 durch die Geraden 6.a, 6.b, 6.c nach einem gegebenen Verhältnisse p : q : r : s, sodann nach Nro. 52. das Trapezoid 2.14.5.12 durch oA nach dem Verhältnisse 8.a : a.9, nach Nro. 53. das Trapez 12.5.4.13 durch oB nach dem Verhältnisse 9.b : b.10, und nach Nro. 51. das Dreyeck 12.4.3 durch oC von 3 an nach dem Verhältnisse 11.c : c.10; so werden wieder wie Nro. 57. die Theile des Vieleckes derselben Ordnung nach den Theilen des Dreyeckes 6.7.11 gleich; also theilen die Geraden oA, oB, oC das Vieleck nach dem gegebenen Verhältnisse.

Fig. 298. 303. 60. Zieht man durch die Scheitel eines Vieleckes mit einer gegebenen Geraden 20.21 die Gleichlaufenden 5.12, 2.13, 3.14; so theilen diese das Vieleck in Dreyecke, Trapezen oder Parallelogrammen ein.

Zeichnet

Zeichnet man also nach Nro. 218. 33. das Dreyeck 6.7.8 dem Dreyecke 5.12.1, das Dreyeck 6.8.9 dem Trapeze 5.12.2.13, das Dreyeck 6.9.10 dem Parallelogramme 2.13.14.3 und das Dreyeck 6.10.11 dem Dreyecke 3.14.4 gleich, theilt nach Nro. 45. das Dreyeck 6.7.11 durch 6.a, 6.b, 6.c nach einem gegebenen Verhältnisse, sodann nach Nro. 48. das Trapez 5.12.2.13 durch die mit 5.12 Gleichlaufende AD nach dem Verhältnisse 8.a : a.9, nach Nro. 49. das Parallelogramm 2.13.14.3 durch die mit 2.13 Gleichlaufende BE nach dem Verhältnisse 9.b : b.10 und nach Nro. 47. das Dreyeck 3.14.4 durch die mit 3.14 Gleichlaufende CF von 4 an, nach dem Verhältnisse 11.c : c.10; so werden abermal die Theile des Vieleckes derselben Ordnung nach den Theilen des Dreyeckes 6.7.11 gleich; also theilen die mit 20.21 gleichlaufenden Geraden AD, BE und CF das Vieleck nach dem gegebenen Verhältnisse.

Es läßt sich also ein Dreyeck und jedes Vieleck durch gerade Linien, welche durch was immer für einen Punkt gehen, oder mit einer jeden Geraden gleichlaufen, nach einem gegebenen Verhältnisse theilen.

Nebst diesen allgemeinen Gesetzen der Eintheilung, lassen sich oft für besondere Fälle noch andere sehr einfache angeben. Man kann z. B. auf die Eintheilung des Trapezoides ba.3.2 durch gerade Linien, welche mit einer Seite desselben ba gleichlaufen aus Nro. 50. Fig. 291, oder durch gerade Linien, welche durch einen Punkt o der verlängerten Seite ba gehen, aus Nro. 34. Fig. 295. ebenso, wie man Nro. 48. und Nro. 52. geschlossen hat, schließen.

61. Benennt man die Ausmessungen (die Linien, welche man zur Berechnung der Flächeninhalte braucht) der Figuren durch Buchstaben; so

wird

wird jede gegebene Figur in eine gleiche, von welcher nur eine Ausmessung unbekannt ist, verwandelt, wenn man die Flächeninhalte beeder berechnet, sie gleich setzet, und die Gleichung auflöset und ausführt.

Fig. 304. Ist z. B. ein Kreis in ein ihm gleiches Quadrat 1.3.4.5 zu verwandeln, und man setzt den Durchmesser 1.2 = a und die Seite 1.4 = x; so ist der Flächeninhalt des Kreises $= \frac{11\,aa}{14}$ und jener des Quadrates $= xx$, also

$$xx = \frac{11\,aa}{14}.$$

Daher verhält sich

$$a : x = x : \frac{11\,a}{14}.$$

Theilt man also den Halbmesser 6.2 in sieben gleiche Theile, nimmt 6.7 = vier derselben, zieht 7.3 senkrecht auf 1.2 und zeichnet auf 1.3 das Quadrat 1.3.4.5; so wird $1.7 = \frac{11\,a}{14}$, folglich 1.3 = x und 1.3.4.5 das verlangte Quadrat.

Fig. 305. Soll ein Kreis, dessen Halbmesser 1.2 = a ist, in einen ihm gleichen Halbkreis, dessen Halbmesser 3.6 = x ist, verwandelt werden; so ist der Flächeninhalt des gegebenen Kreises $= \frac{22\,aa}{7}$ und jener des verlangten Halbkreises $= \frac{11\,xx}{7}$, also

$$\frac{11\,xx}{7} = \frac{22\,aa}{7}$$
$$xx = 2\,aa.$$

Daher verhält sich

$$2a : x = x : a.$$

Zieht

Zieht man also 1.4 senkrecht auf 2.3; so wird 3.4 der Unbekannten x, und der aus 3 mit 3.4 beschriebene Halbkreis $5.4.6$ dem gegebenen Kreise gleich.

Soll man ein bey 2 rechtwinklichtes Trapez $1.2.3.4$ in ein ihm gleiches $5.2.7.6$, dessen Grundlinie 2.7 unbekannt ist, verwandeln; Fig. 306.

so ist $1.2.3.4 = \frac{ac + bc}{2}$ und

$$5.2.7.6 = \frac{dx + de}{2}, \text{ also}$$

$$dx + de = ac + bc$$

$$dx = ac + bc - de$$

$$x = \frac{ac + bc - de}{d}$$

$$x = \frac{(a + b)c}{d} - e.$$

Daher verhält sich

$$d : c = a + b : \frac{(a + b)c}{d}.$$

Nimmt man also $3.8 = b$, zieht 1.9 gleichlaufend mit 5.8, nimmt $9.7 = e$ und zieht 6.7; so wird $2.8 = a + b$, $2.9 = \frac{(a + b)c}{d}$ und $2.7 = \frac{(a + b)c}{d} - e = x$, also $5.2.7.6$ das verlangte Trapez.

Ist das Quadrat $1.2.3.4 = aa$ in ein ihm gleiches Rechteck $2.5.6.7$, dessen Perimeter $= 2c$ ist, zu verwandeln, und man nennt die Grundlinie des Rechteckes x; so wird, weil die Summe der Höhe und Grundlinie $= c$ ist, die Höhe $= c - x$, und das Rechteck $= cx - xx$, also Fig. 307.

$$aa = cx - xx$$
$$xx = cx - aa \text{ und}$$
$$x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{cc}{4} - aa.}$$

Beschreibt man also auf $2.8 = c$ einen Halbkreis, verlängert 1.4 bis in 9. zieht 9.5 und 10.11 senkrecht auf 2.8; so wird $0.5 = 0.11 = \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}$,

also $2.5 = x = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}$ und

$5.8 = c - x$ oder

$2.11 = x = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}$ und

$11.8 = c - x.$

Beschreibt man also aus 5 den Bogen 8.6 und aus 11 den Bogen 8.12, und zieht 6.7 und 12.13 gleichlaufend mit 2.8; so werden die Rechtecke 2.5.6.7 und 2.11.12.13 dem gegebenen Quadrate gleich.

Soll die gegebene Figur sich zu der verlangten wie m:n verhalten; so kann man wieder die Flächeninhalte beeder berechnen, diese Bedingung durch eine Proportion ausdrücken, die Proportion in eine Gleichung verwandeln, und wie zuvor verfahren.

Fig. 308. Ist z. B. ein Kreis von einem Durchmesser 2.5, zu dem sich ein gegebenes Rechteck 1.2.3.4 wie m:n verhält, zu zeichnen; so ist der Flächeninhalt des Rechteckes $= ab$ und jener des Kreises $= \frac{11xx}{14}$; also verhält sich $ab : \frac{11xx}{14} = m : n$; folglich ist

$$\frac{11mxx}{14} = nab$$
$$11mxx = 14nab$$

xx

$$xx = \frac{14\,nab}{11\,m}$$

$$xx = \frac{\frac{14a}{11} \times n}{m} \times b.$$

Daher verhält sich ferner

$$1\text{tens}\ m : n = \frac{14a}{11} : \frac{14na}{11\,m}$$

$$2\text{tens}\ b : x = x : \frac{14na}{11\,m}.$$

Theilt man also 1tens 2.3 in eilf gleiche Theile, nimmt 2.6 = vierzehn derselben, 2.7 = m, 2.8 = n und zieht 8.9 gleichlaufend mit 7.6; so wird $2.6 = \frac{14a}{11}$, und $2.9 = \frac{14na}{11\,m}$: nimmt man 2tens 2.10 = b, beschreibt auf 9.10 einen Halbkreis, und zieht die Senkrechte 2.5; so wird diese = x und der auf dem Durchmesser 2.5 beschriebene Kreis der verlangte.

Ist 1.2.3 ein rechter Winkel, und man soll auf der Grundlinie 2.3 ein Dreyeck 5.2.3, zu dem sich das gegebene Trapez 1.2.3.4 wie m:n verhält, zeichnen; so ist der Flächeninhalt des Trapezes $= \frac{ac + bc}{2}$ und jener des Dreyeckes $= \frac{ax}{2}$; also verhält sich Fig. 309.

$$\frac{ac + bc}{2} : \frac{ax}{2} = m : n; \text{ folglich ist}$$

$$max = nac + nbc$$

$$x = \frac{nac + nbc}{ma}$$

$$x = \frac{nc(a+b)}{ma}$$

$$x = \frac{\frac{nc}{m}(a+b)}{a}.$$

Daher verhält sich ferner

1tens $m : n = c : \frac{nc}{m}$.

2tens $a : a + b = \frac{nc}{m} : x$.

Nimmt man also 1tens $2.6 = m$, $2.7 = n$, und zieht 7.8 gleichlaufend mit 1.6; so wird $2.8 = \frac{nc}{m}$: und nimmt man 2tens $3.9 = b$, zieht 9.5 gleichlaufend mit 3.8, und noch 5.3; so wird $2.9 = a + b$, $2.5 = x$ und $5.2.3$ das verlangte Dreyeck.

62. **Sind was immer für zwo Figuren gegeben, und man soll eine dritte, welche der ersten ähnlich und der zwoten gleich ist, oder welche der ersten ähnlich ist und mit der zwoten in einem gegebenen Verhältnisse steht, zeichnen; so findet man durch den Flächeninhalt der zwoten auch jenen der dritten, und durch die Flächeninhalte der ersten und dritten, und eine Seite der ersten die ihr gleichnamige Seite der dritten, worauf allemal die dritte der ersten ähnlich gezeichnet werden kann.**

Fig. 310. 311. Ist z. B. ein Trapez $5.9.10.11$, welches dem gegebenen Trapeze $5.6.7.8$ ähnlich und dem gegebenen Rechtecke $1.2.3.4$ gleich ist, zu zeichnen; so ist der Flächeninhalt des Rechteckes $1.2.3.4$, oder des Trapezes $5.9.10.11 = ab$, und jener des Trapezes

$5.6.7.8 = \frac{dc + ec}{2}$; also verhält sich, weil die Trapeze ähnlich sind, nach Nro. 2.

$$\frac{dc + ec}{2} : ab = dd : xx;\ \text{folglich ist}$$

$$\left(\frac{dc+ec}{2}\right) xx = abdd$$

$$xx = \frac{2abdd}{dc+ec} = \frac{2abdd}{(d+e)c}$$

$$xx = \frac{2ab}{c} \times \frac{dd}{d+e}.$$

Daher verhält sich ferner

1tens $c : 2b = a : \frac{2ab}{c}$,

2tens $d + e : d = d : \frac{dd}{d+e}$,

3tens $\frac{2ab}{c} : x = x : \frac{dd}{d+e}$.

Nimmt man also 1tens $2.12 = c$, $2.13 = 2b$, und zieht 13.14 gleichlaufend mit 12 . 3; so wird $2.14 = \frac{2ab}{c}$: nimmt man 2tens $5.15 = d + e$, $5.16 = d$, und zieht 6.17 gleichlaufend mit 15. 16; so wird $5.17 = \frac{dd}{d+e}$: und nimmt man 3tens $5.18 = 2.14 = \frac{2ab}{c}$, $5.19 = 5.17 = \frac{dd}{d+e}$, zieht 19.20 senkrecht auf 5.6, beschreibt auf 5.18 einen Halbkreis und aus 5 den Bogen 20.9; so wird $5.9 = 5.20 = x$, und das auf 5.9 dem Trapeze 5.6.7.8 ähnlich gezeichnete Trapez 5.9.10.11 das verlangte.

Soll ein dem gegebenen Drehecke 1.2.3 ähnliches Dreyeck 1.4.5, zu dem sich das gegebene Quadrat Fig. 312. 313.

6.7.8.9 wie m:n verhält, gezeichnet werden; so verhält sich vermög dieser Bedingung

$$m : n = aa : 1.4.5;$$

also ist der Flächeninhalt des Dreyeckes $1.4.5 = \frac{naa}{m}$, und jener des Dreyeckes $1.2.3 = \frac{bc}{2}$; folglich verhält sich, weil diese Dreyecke ähnlich sind,

$$\frac{bc}{2} : \frac{naa}{m} = bb : xx; \text{ also ist}$$

$$xx = \frac{2naab}{mc} = \frac{aa}{c} \times \frac{2nb}{m}.$$

Daher verhält sich ferner

$$1\text{tens} \quad c : a = a : \frac{aa}{c},$$

$$2\text{tens} \quad m : 2n = b : \frac{2nb}{m},$$

$$3\text{tens} \quad \frac{aa}{c} : x = x : \frac{2nb}{m}.$$

Nimmt man also 1tens $7.10 = c$, und zieht 6.11 gleichlaufend mit 10.8; so wird $7.11 = \frac{aa}{c}$: nimmt man 2tens $1.12 = m$, $1.13 = 2n$ und zieht 13.14 gleichlaufend mit 12.2; so wird $1.14 = \frac{2nb}{m}$: und nimmt man 3tens $1.15 = 7.11 = \frac{aa}{c}$, zieht auf 1.2 die Senkrechte 15.16, beschreibt auf 1.14 einen Halbkreis und aus 1 den Bogen 16.4, und zieht noch 4.5 gleichlaufend mit 2.3; so wird $1.4 = 1.16 = x$, und 1.4.5 das verlangte Dreyeck.

Ist die dritte Figur ein gleichseitiges Dreyeck, oder eines aus jenen ordentlichen Vielecken, welche einem Kreise eingeschrieben werden können, und die Aufgabe läßt die erste

ste Figur weg; so wird solche aufgelöset, wenn man vorläufig eine der dritten ähnliche Figur zeichnet und wie zuvor verfährt.

Soll z. B. ein gleichseitiges Dreyeck 5.6.7, zu dem sich das gegebene Rechteck 1.2 3.4 wie m : n verhält, gezeichnet werden, und man zeichnet was immer für ein gleichseitiges Dreyeck 5.8.9; so verhält sich

Fig. 314. 315.

$$m : n = ad : 5.6.7;$$

also ist der Flächeninhalt des Dreyeckes $5.6.7 = \frac{nad}{m}$, und jener des Dreyeckes $5.8.9 = \frac{bc}{2}$; folglich verhält sich, weil diese Dreyecke ähnlich sind,

$$\frac{bc}{2} : \frac{nad}{m} = bb : xx; \text{ also ist}$$

$$xx = \frac{2nadb}{mc} = \frac{ad}{c} \times \frac{2nb}{m}.$$

Daher verhält sich ferner

1tens $c : d = a : \frac{ad}{c}$,

2tens $m : 2n = b : \frac{2nb}{m}$,

3tens $\frac{ad}{c} : x = x : \frac{2nb}{m}$.

Nimmt man also 1tens $2.10 = c$, und zieht 1.11 gleichlaufend mit 10.3; so wird $2.11 = \frac{ad}{c}$: nimmt man 2tens $5.12 = m$, $5.13 = 2n$, und zieht 13.14 gleichlaufend mit 12.8; so wird $5.14 = \frac{2nb}{m}$: und nimmt man 3tens $5.15 = 2.11 = \frac{ad}{c}$, zieht 15.16. senkrecht auf 5.8, beschreibt auf 5.14 einen Halbkreis und aus 5 den Bogen 16.6, und zieht noch

6.7 gleichlaufend mit 8.9; so wird 5.6 = 5.16 = x und 5.6.7 das verlangte Dreyeck.

Fig. 316. 317. Ist das Rechteck 1.2.3.4 in ein ihm gleiches ordentliches Achteck von dem Halbmesser x zu verwandeln, und man schreibt einem Kreise von einem beliebigen Halbmesser c ein ordentliches Achteck ein; so ist der Flächeninhalt des Rechteckes oder des verlangten Achteckes = ab, und jener des nun eingeschriebenen Achteckes = 4 cd, also verhält sich, weil diese Achtecke ähnlich sind,

$4cd : ab = cc : xx$; folglich ist

$$xx = \frac{abc}{4d} = \frac{\frac{a}{4} \times b}{d} \times c.$$

Daher verhält sich ferner

1tens $d : b = \frac{a}{4} : \frac{ab}{4d}$,

2tens $c : x = x : \frac{ab}{4d}$.

Nimmt man also 1tens $2.5 = \frac{a}{4}$, $2.6 = d$ und zieht 3.7 gleichlaufend mit 6.5; so wird $2.7 = \frac{ab}{4d}$:

und nimmt man 2tens $8.9 = 2.7 = \frac{ab}{4d}$, beschreibt auf 8.10 einen Halbkreis, und zieht die Senkrechte 9.11; so wird $8.11 = x$.

Schreibt man also dem aus 8 mit 8.11 beschriebenen Kreise ein ordentliches Achteck ein; so ist dieses das verlangte.

Noch einfacher wird die Aufgabe und deren Auflösung, wenn die erste und zwote Figur nur eine und dieselbe ausmachen, oder wenn eine Figur, welche einer gegebenen ähnlich ist, und mit dieser in einem gegebenen Verhältnisse steht, gezeichnet werden soll.

Ist

Ist z. B. ein Viereck 5.6.7.8, welches einem gegebenen 1.2.3.4 ähnlich ist, und sich zu diesem wie n : m verhält, zu zeichnen; so verhält sich vermög dieser Bedingung Fig. 318. 319.

$$1.2.3.4 : 5.6.7.8 = m : n,$$

und weil diese Vierecke ähnlich sind

$$1.2.3.4 : 5.6.7.8 = aa : xx, \text{ also}$$
$$m : n = aa : xx; \text{ folglich ist}$$

$$xx = \frac{naa}{m} = \frac{na}{m} \times a.$$

Daher verhält sich ferner

$$1\text{tens} \quad m : n = a : \frac{na}{m},$$

$$2\text{tens} \quad a : x = x : \frac{na}{m}.$$

Nimmt man also 1tens 2.9 = m, 2.10 = n, und zieht 10.11 gleichlaufend mit 9.3; so wird $2.11 = \frac{na}{m}$: und beschreibt man 2tens auf 2.3 einen Halbkreis, und zieht die Senkrechte 11.12; so wird 2.12 = x. Nimmt man daher 6.7 = 2.12 und zeichnet das Viereck 5.6.7.8 dem Vierecke 1.2.3.4 ähnlich; so wird jenes das verlangte.

63. Sind bey der Eintheilung oder Verwandlung einer Figur die Verhältnisse

$$p : q : r : s$$

in Zahlen gegeben; so kann man wie Nro. 7, für jede Zahl soviel gleiche Theile einer beliebigen geraden Linie, als sie Einheiten hat, annehmen und in allen Fällen wie zuvor verfahren.

Soll eine Figur in mehrere gleiche Theile getheilet werden; so nimmt man

$$p = q = r = s$$

beliebig an und verfährt überall wieder wie zuvor.

Sind alle zur Auflösung einer geometrischen Aufgabe erforderlichen Linien in Zahlen gegeben; so wird auch der Werth der Unbekannten in Zahlen gefunden, und die Aufgabe durch die Rechnung allein aufgelöset.

Ist z. B. der Perimeter eines Rechteckes 34 und der Flächeninhalt 60 Klafter, und man soll dessen Höhe und Grundlinie finden; so wird, wenn die Grundlinie = x ist, die Höhe = 17 — x, also

$$60 = 17x - xx$$
$$xx = 17x - 60$$
$$x = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4} - 60}$$
$$x = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4} - \frac{240}{4}}$$
$$x = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$$
$$x = \frac{17}{2} \pm \frac{7}{2}$$
$$x = 12, \text{ und } 17 - x = 5 \text{ oder}$$
$$x = 5, \text{ und } 17 - x = 12.$$

64. Soll eine auf dem Felde gegebene Figur nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt oder verwandelt werden; so nimmt man dieselbe genau auf, vollzieht die Theilung oder Verwandlung auf dem Plane, und stecket die dadurch erhaltenen Figuren nach (190 N. 1th.) oder den vermittelst des verjüngten Maßstabes gemessenen Linien des Planes auf dem Felde aus; oder man mißt alle zur Auflösung erforderlichen Linien nach dem wirklichen Maße, sucht die Werthe der Unbekannten durch Rechnung, und stecket diese nach dem gefundenen Maße auf dem Felde aus.

Fig. 320. Ist z. B. das Trapez a b c d durch die Geraden m n und p q, welche mit a d und b c gleichlaufen, von a d an nach dem Verhältnisse 1 : 2 : 3 zu theilen, und man sucht den Durchschnitt e der Seiten b a und c d, und stellet

let sich vor, es wären nach Nro. 48. auf e b ein Halbkreis und aus e der Bogen a f beschrieben, und die Senkrechte f g gezogen, sodann g b in h und k wie 1 : 2 : 3 getheilt, die Senkrechten h l und k o gezogen, und aus e die Bögen l n und o q beschrieben; so kann man b a und a e messen, erstlich e g, e h und e k, sodann e n und e q berechnen, diese nach den gefundenen Maßen ausstecken, und endlich noch die verlangten Gleichlaufenden m n und p q ziehen.

Ist a b = 60 und a e = 20 Klafter; so ist nach Nro. 12.

1tens $eg \times eb = ef^2 = ea^2$, folglich

$$eg = \frac{400}{80} = 5°, \text{ und } gb = 75°,$$

$$gh = \frac{75}{6} = 12°.5$$

$$gk = \frac{75}{2} = 37°.5$$

$$eh = 17°.5$$

$$ek = 42°.5,$$

2tens $en^2 = el^2 = eb \times eh$, folglich

$$en = \sqrt{80 \times 17.5} = \sqrt{1400}$$

$$en = 37°.41.$$

3tens $eq^2 = eo^2 = eb \times ek$, folglich

$$eq = \sqrt{80 \times 42.5} = \sqrt{3400}$$

$$eq = 58°.30.$$

Nimmt man also $en = 37.41$ und $eq = 58.30$ Klafter, und stecket die mit a d oder b c gleichlaufenden Geraden m n und p q aus; so sind diese die verlangten Theilungslinien.

65. Um die (Nro. 74. M. 1th.) abgehandelte Lehre zu ergänzen, und jene (Nro. 80. M. 1th.) zu erweitern können noch folgende Aufgaben aufgelöset werden.

Es sey durch was immer für einen Punkt o zu zwo gegebenen Tangenten 4 . 1 und 3 . 1 ein Kreis zu beschreiben. Fig. 321.

Hal-

Halbirt man den Winkel 4.1.3 durch die Gerade 1.2; so muß der Mittelpunkt 2 des verlangten Kreises in dieser Geraden 1.2 liegen.

Gesetzt also, es sey 2.3 und 0.5 senkrecht auf 1.3, und 0.6 gleichlaufend mit 3.5 gezogen; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 1.5.7 und 1.3.2

$$a : a + x = b : y;$$ folglich ist

$$y = \frac{ab + bx}{a}:$$

und wegen des rechtwinklichten Dreyeckes 0.6.2 ist

$$yy = xx + (y - c)^2$$
$$yy = xx + yy - 2cy + cc$$
$$2cy = xx + cc$$
$$y = \frac{xx + cc}{2c},$$ folglich
$$\frac{xx + cc}{2c} = \frac{ab + bx}{a}$$
$$xx + cc = \frac{2abc}{a} + \frac{2bcx}{a}$$
$$xx = \frac{2bcx}{a} + 2bc - cc$$

Setzt man daher

1tens $\frac{bc}{a} = n$, also

$$a : b = c : n,$$

nimmt folglich 5.8 = a, 5.9 = c, und zieht 7.10 gleichlaufend mit 8.9; so wird

$$5.10 = n,$$ und
$$xx = 2nx + 2bc - cc.$$

Setzt man

2tens $2bc - cc = qq$, also

$$c : q = q : 2b - c,$$

nimmt folglich 7.11 = 7.0 = b − c, 5.12 = 5.11 = 2b − c, und beschreibt auf 9.12 einen Halbkreis 9.13:12; so wird

5.13

$$5.13 = q$$
$$xx = 2nx + qq \text{ und}$$
$$x = n \pm \sqrt{nn + qq}.$$

Beschreibt man daher aus 10 mit dem Halbmesser 10.13 $= \sqrt{nn + qq}$ einen Halbkreis 3.13.14, und zieht auf 1.3 die Senkrechten 3.2 und 14.15; so wird

$$x = n + \sqrt{nn + qq} = 5.10 + 10.3 = 5.3 \text{ und}$$
$$x = n - \sqrt{nn + qq} = 5.10 - 10.14 = 5.14;$$

also sind 2 und 15 die Mittelpunkte der zween Kreise, welche der Aufgabe Genügen leisten.

Wächst c bis c = b wird, oder bis der gegebene Punkt o des Umfanges in der Geraden 1.2, welche den Winkel 4.1.3 halbirt, liegt; so giebt diese Bedingung in der Gleichung Fig. 321. 322.

$$xx = \frac{2bcx}{a} + 2bc - cc$$

ausgedrückt, die Gleichung

$$xx = \frac{2bbx}{a} + 2bb - bb \text{ oder}$$
$$xx = \frac{2bbx}{a} + bb.$$

Setzt man daher

$$\frac{bb}{a} = n; \text{ also}$$
$$a : b = b : n,$$

nimmt folglich 5.7 = a, 5.8 = b, und zieht o.9 gleichlaufend mit 7.8; so wird Fig. 322.

$$5.9 = n,$$
$$xx = 2nx + bb \text{ und}$$
$$x = n \pm \sqrt{nn + bb}.$$

Beschreibt man daher aus 9 mit dem Halbmesser 9.o $= \sqrt{nn + bb}$ einen Halbkreis 3.o.10, und zieht auf 1.3 die Senkrechten 3.2 und 10.11; so wird

x

$$x = n + \sqrt{nn + bb} = 5.9 + 9.3 = 5.3 \text{ und}$$

$$x = n - \sqrt{nn + bb} = 5.9 - 9.10 = 5.10;$$

also sind 2 und 11 die verlangten Mittelpunkte.

Zieht man 0.6 gleichlaufend mit 3. 5; so kann für diesen Fall die Gleichung

$$xx = \frac{2bbx}{a} + bb$$

auch ebenso wie die allgemeine

$$xx = \frac{2bcx}{a} + 2bc - cc$$

durch die ähnlichen Dreyecke 1.5.0 und 1.3. 2 und das rechtwinklichte Dreyeck 0.6. 2 gefunden werden.

Fig. 321. Wächst a, bis a unendlich groß wird, oder bis der Durchschnitt 1 nirgends mehr ist, also die Geraden 4.1 und 3.1 mit 2.1 gleichlaufen; so wird in der allgemeinen Gleichung

$$xx = \frac{2bcx}{a} + 2bc - cc$$

für diesen Fall der Ausdruck

$$\frac{2bcx}{a} = 0, \text{ also}$$

$$xx = 2bc - cc$$

$$x = \pm \sqrt{2bc - cc} \text{ und}$$

$$c : x = x : 2b - c.$$

Fig. 323. Zieht man daher, im Falle die gegebenen Tangenten 4.1 und 3.1 gleichlaufen, durch 0 auf 3.1 die Senkrechte 5.8, halbirt diese durch die Senkrechte 2.1 in 7, und beschreibt aus 7 den Halbkreis 0.10, aus 5 den Halbkreis 0.9 und auf dem Durchmesser 9.10 den Kreis 9.3.10.11; so wird

$$7.10 = b - c$$

$$5.10 = 2b - c$$

$$5.\ 9 = c, \text{ also}$$

$$x = +\sqrt{2bc - cc} = 5.3\text{, und}$$
$$x = -\sqrt{2bc - cc} = 5.11.$$

Folglich geben die auf 3.1 senkrechten Geraden 3.2 und 11.12 die verlangten Mittelpunkte 2 und 12.

Zieht man 0.6 gleichlaufend mit 5.3; so wird die Gleichung

$$xx = 2bc - cc$$

auch durch das rechtwinklichte Dreyeck 0.6.2 gefunden.

Wächst c auch in diesem letzten Falle, bis $c = b$ wird, oder bis 0 von den gegebenen gleichlaufenden Tangenten 4.1 und 3.1 gleichweit absteht; so giebt diese Bedingung in der Gleichung Fig. 324.

$$xx = 2bc - cc$$

ausgedrückt

$$xx = 2bb - bb$$
$$xx = bb \text{ und}$$
$$x = \pm b.$$

Zieht man daher durch 0 die Gerade 2.1 gleichlaufend mit 3.1, 0.5 senkrecht auf 3.1, und beschreibt aus 0 den Halbkreis 2.5.6; so sind 2 und 6 die verlangten Mittelpunkte.

Ist anstatt der Tangente 4.1 noch ein Punkt 4 des Umfanges gegeben, also durch zween Punkte 0 und 4 zu einer gegebenen Tangente 3.1 ein Umfang zu beschreiben, und man halbirt die Sehne 0.4 durch die Senkrechte 2.1; so muß der Mittelpunkt 2 des verlangten Kreises abermal in dieser Geraden 2.1 liegen. Fig. 321. 325.

Gesetzt also, es sey 2.3 und 0.5 senkrecht auf 3.1, und 0.6 gleichlaufend mit 5.3; so findet man wie zuvor durch die ähnlichen Dreyecke 1.5.17 und 1.3.2, und das rechtwinklichte Dreyeck 0.6.2

$$xx = \frac{2bcx}{a} + 2bc - cc.$$

Beschreibt man daher wie oben aus 5 die Bögen 1.8 und 0.9, und zieht 17.10 gleichlaufend mit 8.9, sodann aus 17 den Halbkreis 0.11, aus 5 den Bogen Fig. 325.

11.12,

11.12, auf 9.12 den Halbkreis 9.13.12 und aus 10 den Halbkreis 3.13.14, und zieht 3.2 und 14.15 senkrecht auf 3.1; so sind 2 und 15 die verlangten Mittelpunkte.

Fig. 325. 326. Wird a unendlich groß, oder 2.1 gleichlaufend mit 3.1, folglich die Sehne 0.4 senkrecht auf 3.1; so wird in der allgemeinen Gleichung

$$xx = \frac{2bcx}{a} + 2bc - cc$$

für diesen Fall der Ausdruck

$$\frac{2bcx}{a} = 0, \text{ also}$$

$$xx = 2bc - cc.$$

Fig. 326. Beschreibt man daher wie oben aus 5 den Halbkreis 0.17, auf dem Durchmesser 17.4 den Kreis 17.3.4.8, und zieht 3.2 und 8.9 senkrecht auf 3.1; so sind 2 und 9 die verlangten Mittelpunkte.

Zieht man 0.6 gleichlaufend mit 5.3; so erhält man durch das rechtwinklichte Dreyeck 0.6.2 ebendiese Gleichung

$$xx = 2bc - cc.$$

Fig. 327. 328. Ist die Sehne 4.0 gleichlaufend mit der gegebenen Tangente 3.1; so muß die Senkrechte, welche die Sehne in 1 halbirt, abermal durch den Mittelpunkt 2 des verlangten Kreises gehen.

Gesetzt also, es sey der Halbmesser 2.0 gezogen; so giebt das rechtwinklichte Dreyeck 2.1.0

Fig. 327. $xx = aa + (c - x)^2$ und

Fig. 328. $xx = aa + (x - c)^2$, also

Fig. 327. und Fig. 328.

$$xx = aa + cc - 2cx + xx$$

$$2cx = cc + aa \text{ und}$$

$$x = \frac{c}{2} + \frac{aa}{2c}.$$

Daher verhält sich

c:a

$$c : a = \frac{a}{2} \cdot \frac{aa}{2c} \text{ oder}$$

$$\frac{c}{2} : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} : \frac{aa}{2c}$$

Halbirt man daher c durch die Senkrechte 5.7, und a durch die Senkrechte 6.7, beschreibt aus 5 die Bögen 3.8 und 7.9, und zieht 7.2 gleichlaufend mit 8.9; so wird

$$5.2 = \frac{aa}{2c},$$

$$x = \frac{c}{2} + \frac{aa}{2c} = 3.5 + 5.2 = 2.3,$$

also 2 der verlangte Mittelpunkt.

Oder setzet man Fig. 321, 0.5 seye senkrecht auf die Halbirungslinie 1.2, so ist 0.7 = 7.4', und 0.4, Fig. 321, 323, 325, und 326. eine Sehne des Kreises, ist nun 3.5 = x, 0.5 = a, 5.7 = b, so ist 7.4 = b — a und 5.4 = 2b — a, also

Fig. 321. 323. 325. 326.

$$xx = (2b - a)a, \text{ folglich verhält sich}$$
$$2b - a : x = x : a.$$

Beschreibt man daher für alle vier Fälle auf 5.4 einen Halbkreis, zieht aus 0 die Senkrechte auf 5.4, so wird die Sehne = x, trägt man also diese Sehne von 5 in 3, so bestimmen die Senkrechten 3.2 die Mittelpunkte 2 der Kreise.

Ist auch Fig. 322. 0.5 senkrecht auf 1.2, und a wächst Fig. 322 und 324, bis a = b wird, so giebt diese Bedingung in der Gleichung

Fig. 322. 324.

$$xx = (2b - a)a$$

ausgedrückt die Gleichung

$$xx = bb$$

welche Gleichung auch aus der Figur folgt.

Beschreibt man also mit 0.5 = b aus 5 einen halben Umfang 3.0.10 so bestimmen die Senkrechten aus 3 und 10 errichtet, wieder die Mittelpunkte der Kreise.

Und

Fig. 327. 328. Und halbirt man Fig. 327 und 328 die Sehne o.4 durch die Senkrechte 1.3, so sind drey Punkte 4.0.3 des Umfangs gegeben, folglich der Kreis bestimmt.

Sind also zwo Tangenten und was immer für ein Punkt des Umfanges, oder eine Tangente und jede zween Punkte des Umfanges gegeben; so kann der Kreis in jedem Falle beschrieben werden.

Fig. 329. 66. Es seyen in einer geraden Linie zween Punkte 1 und 2 gegeben, man soll einen dritten 3 finden, so daß das Quadrat der Entfernung 1.3 des dritten von dem ersten dem Rechtecke aus der Entfernung 3.2 des dritten von dem zweyten in die Entfernung 1.2 der zween gegebenen gleich wird.

Vermög der Bedingung der Aufgabe ist

$$xx = r(r - x)$$

$$xx = rr - rx$$

$$xx = - rx + rr, \text{ also}$$

$$x = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{rr}{4} + rr}.$$

Nimmt man also $1.6 = \frac{r}{2}$, zieht $1.5 = r$ senkrecht auf 1.2, und beschreibt aus 6 mit dem Halbmesser $6.5 = \sqrt{\frac{rr}{4} + rr}$ einen Halbkreis 4.5.3; so wird

$$x = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{rr}{4} + rr} = -1.6 + 6.3 = 1.3,$$

$$x = -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{rr}{4} + rr} = -1.6 - 6.4 = 1.4.$$

Folglich thut sowohl der Punkt 4, als der Punkt 3 der Aufgabe ein Genügen.

Soll man eine Gerade 1.2 in einem Punkte 3 **nach dem mittlern und äußern Verhältnisse** theilen, das

das ist, so theilen, daß das Quadrat des größern Theiles 1.3 dem Rechtecke aus dem kleinern Theile 3.2 in die ganze Gerade 1.2 gleich wird; so kömmt die Auflösung dieser Aufgabe mit jener der vorigen überein, nur mit diesem Unterscheide, daß der verneinende Werth 1.4 der Unbekannten x, weil der Punkt 4 die Gerade 1.2 nicht theilt, hier nimmermehr statt findet.

Ist in dem Dreyecke ABC der Winkel beym Mittelpunkte C = 36°; so wird die Sehne AB die Seite des ordentlichen dem Kreise eingeschriebenen Zehneckes, und ein jeder aus den Winkeln A und B = 72°: und halbirt man den Winkel B durch BD; so wird in dem Dreyecke ABD der Winkel B = 36° und der Winkel D = 72°; folglich sind die Dreyecke ABD und BDC gleichschenklicht, die Seiten AB, BD und DC gleich, und die Dreyecke ACB, und ABD ähnlich; also verhält sich CA : AB oder CD = AB oder CD : DA oder

Fig. 330.

$$r : x = x : r - x; \text{ folglich ist}$$

$$xx = r\,(r - x).$$

Theilt man daher den Halbmesser CA in D nach dem mittlern und äußern Verhältnisse; so wird der größere Theil CD der Seite des ordentlichen dem Kreise eingeschrieben Zehneckes gleich.

Ist in dem Dreyecke ACB der Winkel beym Mittelpunkte C = 72°; so wird die Sehne AB die Seite des ordentlichen dem Kreise eingeschriebenen Fünfeckes, und ein jeder aus den Winkeln A und B = 54°: und halbirt man den Winkel ACB durch CD und den Winkel ACD durch CE; so wird der Winkel BCF = 36 + 18 = 54° und der Winkel BFC = 72°; also sind die gleichschenklichten Dreyecke ACB und BFC ähnlich; daher verhält sich

Fig. 331.

$$a : r = r : BF; \text{ folglich ist}$$

$$BF = \frac{rr}{a}.$$

Zieht man ferner DB, DA und DF; so wird DA die Seite des ordentlichen dem Kreise eingeschriebenen Zehneckes,

eckes, und das gleichschenklichte Dreyeck AFD dem gleichschenklichten Dreyecke ADB wegen des an den Grundlinien gemeinen Winkels A ähnlich; daher verhält sich

$$a : x = x : AF;\ \text{folglich ist}$$

$$AF = \frac{xx}{a},\ \text{also}$$

$$a = \frac{rr}{a} + \frac{xx}{a},\ \text{und}$$

$$aa = rr + xx.$$

Das Quadrat der Seite des ordentlichen einem Kreise eingeschriebenen Fünfeckes ist also dem Quadrate der Seite des ordentlichen Sechseckes mehr dem Quadrate der Seite des ordentlichen Zehneckes, welche demselben Kreise eingeschrieben sind, gleich.

Fig. 332. Zieht man daher 1.5 senkrecht auf den Durchmesser 2.7, halbirt den Halbmesser 1.7 in 6, und beschreibt aus 6 mit dem Halbmesser $6.5 = \sqrt{\frac{rr}{4} + rr}$ einen Bogen 5.3; so wird 1.2 in 3 nach dem mittlern und äußern Verhältnisse getheilt, also 1.3 der Seite des ordentlichen Zehneckes und die Sehne 5.3 der Seite des ordentlichen Fünfeckes, welche dem Kreise eingeschrieben werden können, gleich. Daher läßt sich jedes ordentliche Vieleck, dessen Anzahl der Seiten ein Produkt aus 5 und einer Potenz von 2 ist, jedem Kreise ein- und umschreiben.

Von der Körpermessung.

67.

Fig. 333. Sind aA, bB, cC, dD, eE gleichlaufende gerade Linien, durch jede zwo auf einander folgenden, Ebenen gezogen, und diese durch zwo gleichlaufenden Ebenen abcde und ABCDE geschnitten; so heißt der Körper, den alle diese Ebenen begränzen, ein **Prisma.** Jene gleich-

gleichlaufenden geraden Linien werden seine **Seiten**, die begränzten Ebenen dieser Seiten seine **Seitenflächen**, jene zwo gleichlaufenden ebenen Figuren a b c d e und A B C D E seine **Grundflächen**, und die Entfernung beeder Grundflächen oder die Senkrechte d o, welche man von einem Punkte der einen auf die andere Grundfläche zieht, seine **Höhe** genennt.

Weil die Durchschnitte a e und A E zwoer gleichlaufenden Ebenen, der Grundflächen, und einer dritten Ebene, einer Seitenfläche, allemal gleichlaufen; so sind alle Seitenflächen Parallelogrammen, alle Seiten a A, b B, c C des Prisma, jede zwo entgegengesetzten Seiten a e und A E der Grundflächen und jede zween entgegengesetzten Winkel b a e und B A E ebenderselben gleich, also die beeden Grundflächen vollkommen gleiche (gleich und ähnliche) Figuren.

Schneidet man ein Prisma durch eine mit der Grundfläche gleichlaufende Ebene x y z u t; so wird dieser Schnitt eine Grundfläche des Prisma x D, also der Grundfläche A B C D E vollkommen gleich.

Ist eine aus den Seiten eines Prisma senkrecht auf die Grundfläche; so sind es alle Seiten und Seitenflächen.

Nachdem die Seiten eines Prisma senkrecht oder schief auf die Grundfläche stehen; so heißt dasselbe ein **rechtes** oder ein **schiefes** Prisma: jedes wird nach der Anzahl seiner Seiten **dreyseitig**, **vierseitig**, **fünfseitig** u. s. f. genennt.

In einem rechten Prisma wird jede Seite der Höhe desselben gleich.

Wenn die obern und die untern Grundflächen zweyer Prismen a D und m Q in denselben Ebenen liegen; so sind beyder Höhen d o und q o gleich: und liegen die untern Grundflächen zweyer gleichhohen Prismen in einer und derselben Ebene; so muß die Ebene der einen a b c d e aus den oberen Grundflächen verlängert durch jeden Punkt q der andern m n p q r gehen; also liegen auch die obern Grundflächen in einer und derselben Ebene. Fig. 333. 334.

Fig. 333. 334. 68. Wenn zwey gleichhohe Prismen aD und mQ vollkommen gleiche Grundflächen haben, jede zwo Seitenflächen, welche auf den gleichnamigen Seiten der Grundflächen stehen, mit den Grundflächen einwärts gleiche Winkel machen, und man stellt das eine mQ so in das andere aD, daß die Gränzen ihrer Grundflächen übereinkommen; so fallen jede zwo gleichnamigen Seitenflächen wegen jener gleichen Winkel, und die beeden obern Grundflächen wegen der gleichen Höhen der Prismen in eine und dieselbe Ebene, folglich fallen auch die Durchschnitte jeder zwo Ebenen des einen Prisma mit den Durchschnitten der zwo entsprechenden Ebenen des andern Prisma zusammen, also decken sich die Prismen.

Daher sind jede zwey gleichhohen Prismen, welche vollkommen gleiche Grundflächen haben, und deren gleichnamige Seitenflächen mit den Grundflächen einwärts gleiche Winkel machen, vollkommen gleich.

Fig. 335. 69. Wenn zwey Prismen aC und aN eine gemeine Seite aA haben, und zwischen denselben Seitenebenen stehen; so ist $nN = aA = cC$, also auch $cn = CN'$, und aus ähnlichem Grunde $pd = PD$, $qe = QE$ u. s. f.; ferner ist jeder Winkel, den eine Ebene nd mit der Ebene ac in ihrem Durchschnitte dc macht, der äußere, und der Winkel, den die Ebene ND mit der Ebene AC in ihrem Durchschnitte DC macht, der innere entgegengesetzte Winkel zwischen den gleichlaufenden Ebenen ac und AC, welche von einer dritten nD geschnitten werden; also machen die Seitenflächen nd, pe, qae &c. des Körpers md und die Seitenflächen ND, PE, QAE &c. des Körpers MD mit den Grundflächen ac und AC einwärts ebendieser Körper gleiche Winkel. Stellet man also den Körper md so in den Körper MD, daß die Gränzen ihrer vollkommen gleichen Grundflächen ac und AC übereinkommen; so fallen die Seitenflächen nd und ND, pe und PE, qae und QAE &c. ihre Durch-

schnitte

schnitte die Seiten cn und CN, pd und BD, qe und QE &c. die Endepunkte dieser Seiten n und N, p und P, q und Q &c. und die Ebenen an und AN zusammen, folglich decken sich diese Körper und sind vollkommen gleich. Addirt man nun zu beeden den Körper abcde QPNMA; so findet man das Prisma aC dem Prisma aN gleich.

Daher sind jede zwey Prismen, welche eine gemeine Seite haben, und zwischen denselben Seitenebenen stehen, gleich.

70. Ist die Grundfläche abcd eines Prisma gd oder od ein Parallelogramm; so wird das Prisma ein **Parallelepiped** genennt. Fig. 336.

Weil hg mit ef und ha mit ed gleichläuft; so sind auch jede zwo entgegengesetzten Seitenflächen hb und ec gleichlaufend.

Jede Seitenfläche eines Parallelepipedes kann also als die Grundfläche desselben angesehen werden.

71. Wenn zwey gleichhohe Parallelepipeden gd und od, zwischen zwo gleichlaufenden Ebenen ma und nb auf derselben Grundfläche bd stehen; so liegen auch ihre obern Grundflächen ge und om wegen der gleichen Höhen beyder Parallelepipeden in derselben Ebene: sieht man also die Seitenflächen hb und pb als Grundflächen an; so haben diese Parallelepipeden eine gemeine Seite ad, und stehen zwischen denselben Seitenebenen, also sind sie gleich. Fig. 336.

Daher sind jede zwo gleichhohe Parallelepipeden, welche zwischen zwoen gleichlaufenden Ebenen auf derselben Grundfläche stehen, gleich.

72. Wenn zwey gleichhohe Parallelepipeden gd und md auf einer gemeinen Grundfläche bd stehen, und man verlängert die Seitenflächen ka und lb des einen, welche auf den entgegengesetzten Seiten der gemeinen Grundfläche stehen, bis sie die ebenfalls verlängerten Seitenflächen ec und hb des andern, welche auf den zwo übrigen Seiten derselben Grundfläche stehen, schneiden; so entsteht zwischen Fig. 337.

den Durchschnitten ihrer Ebenen und den Ebenen beeder Grundflächen ein drittes Parallelepiped z d, welches nach Vorigem dem Parallelepipede g d, und dem Parallelepipede m d gleich ist, folglich sind auch diese gleich.

Wenn zwey gleichhohe Parallelepipeden vollkommen gleiche Grundflächen haben, und man stellet sie so ineinander, daß die Gränzen ihrer Grundflächen übereinkommen; so werden sie wie die vorigen gleich gefunden.

Daher sind gleichhohe Parallelepipeden, welche vollkommen gleiche Grundflächen haben, gleich.

Fig. 338. 339. 73. Wenn zwey gleichhohe rechte Parallelepipeden g d und s p gleiche Grundflächen haben, und man schneidet aus d mit dem Halbmesser m p die verlängerte b c in y und zieht a x gleichlaufend mit d y; so wird das Parallelogramm x d = b d = n p: die Parallelogrammen x d und n p aber haben gleiche Grundlinien d y und m p, also auch gleiche Höhen.

Setzt man nun auf das Parallelogramm x d in gleicher Höhe ein rechtes Parallelepiped u d; so haben die Parallelepipeden u d und s p vollkommen gleiche Grundflächen e y und t p, und mit den Parallelogrammen x d und n p gemeine, also gleiche Höhen, und die Parallelepipeden u d und g d eine gemeine Grundfläche h d und dieselbe Höhe, die Entfernung der gleichlaufenden Ebenen h d und g y; also ist das Parallelepiped s p = u d = g d.

Rechte Parallelepipeden von gleichen Höhen und Grundflächen sind also gleich.

74. Wenn zwey schiefe Parallelepipeden gleiche Höhen und Grundflächen haben, und man setzt auf die Grundfläche eines jeden ein rechtes in gleicher Höhe; so ist jedes schiefe dem zugehörigen rechten, ein rechtes dem andern rechten, also auch ein schiefes dem andern schiefen gleich.

Daher sind allgemein alle Parallelepipeden von gleichen Höhen und Grundflächen gleich.

75.

75. Schneidet man ein rechtes Parallelepiped fa durch die Diagonalebene gd; so haben die gleichhohen dreyseitigen Prismen abdegh und cdbgef vollkommen gleiche Grundflächen abd und cdb, und ihre Seitenflächen machen mit diesen Grundflächen lauter rechte Winkel; also sind nach Nro. 68. diese Prismen vollkommen gleich. Fig. 340.

Ein rechtes Parallelepiped wird also durch die Diagonalebene in zwey vollkommen gleiche Prismen geschnitten.

76. Ist ein schiefes Parallelepiped aq durch die Diagonalebene ro geschnitten, und man schneidet dasselbe durch die auf die Seite ah senkrechten Ebenen hf und ac; so wird nach Nro. 69. das schiefe Parallelepiped aq dem rechten af, und das schiefe Prisma aomrph dem rechten adbgeh, also auch das schiefe Prisma monqpr dem rechten bdcfeg gleich: diese rechten dreyseitigen Prismen aber sind nach Vorigem einander gleich, also sind es auch die schiefen.

Daher wird allgemein jedes Parallelepiped durch die Diagonalebene in zwey gleiche Prismen geschnitten.

77. Sind die Grundflächen abc und mno zweyer gleichhohen dreyseitigen Prismen gleich; und man zieht durch dc und eb die Ebenen dg und eg gleichlaufend mit den Seitenflächen fb und fc, und durch po und qn die Ebenen ps und qs gleichlaufend mit den Ebenen rn und ro; so sind die Parallelogrammen ag und ms, folglich die Parallelepipeden ah und mt, also auch ihre Hälften, die dreyseitigen Prismen abcdef und mnopqr gleich. Fig. 342. 343.

Daher sind alle dreyseitigen Prismen von gleichen Höhen und Grundflächen gleich.

78. Wenn mehrere gerade Linien oa, ob, oc, od in einem Punkte o zusammenlaufen, durch jede zwo aufeinander folgenden, Ebenen gezogen sind, und diese durch eine Ebene abcd geschnitten werden; so heißt der Kör- Fig. 344.

per

per o a b c d, den alle diese Ebenen begränzen, eine **Pyramide**. Jene geraden Linien werden ihre **Seiten**, die begränzten Ebenen dieser Seiten ihre **Seitenflächen**, jene ebene Figur a b c d ihre **Grundfläche**, und die Entfernung o x der Spitze von der Grundfläche ihre **Höhe** genennt.

Eine Pyramide heißt nach der Anzahl ihrer Seiten, **dreyseitig, vierseitig, fünfseitig** u. s. f.

Jede Seitenfläche einer dreyseitigen Pyramide kann allemal als die Grundfläche derselben angesehen werden.

Fig. 362. Ist die Grundfläche einer Pyramide o a b ein ordentliches Vieleck, und die Senkrechte o x, welche man von der Spitze auf die Grundfläche zieht, geht durch den Mittelpunkt dieses Vieleckes; so wird die Pyramide eine **rechte**, sonst eine **schiefe** genennt.

Fig. 344. 79. Ist o x senkrecht auf die Grundfläche a b c d, und die Ebene h g f e gleichlaufend mit derselben; so sind die Durchschnitte a d und h e, ab und h g, b c und g f, c d und f e, d x und e y zwoer gleichlaufenden Ebenen und einer dritten Ebene gleichlaufend; also sind wegen der ähnlichen Dreyecke o a d und o h e, o b a und o g h, o c b und o f g, o d c und o e f, o d x und o e y, die Verhältnisse a d : h e, a o : h o, b a : g h, b o : g o, c b : f g, c o : f o, d c : e f, d o : e o, o x : o y, und wegen der gleichlaufenden Schenkel die Winkel g h e und b a d, f g h und c b a, e f g und d c b, h e f und a d c gleich, folglich die Figuren a b c d und h g f e ähnlich; also verhält sich

$$abcd : hgfe = \overline{ad}^2 : \overline{he}^2 \text{ oder}$$
$$abcd : hgfe = \overline{ox}^2 : \overline{oy}^2.$$

Daher sind jede gleichlaufenden Schnitte zwischen den Seitenflächen einer Pyramide ähnliche Figuren, die sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze verhalten.

80.

80. Wenn zwo Pyramiden von gleichen Höhen ox Fig. und gleichen Grundflächen abcd und mnp in gleichen 344. Entfernungen oy von den Spitzen gleichlaufend mit den 345. Grundflächen geschnitten werden; so verhält sich nach Vorigem

$$abcd : hgfe = \overline{ox}^2 : \overline{oy}^2 \text{ und}$$
$$mnp : srq = \overline{ox}^2 : \overline{oy}^2, \text{ also}$$
$$abcd : hgfe = mnp : srq;$$
es ist aber $abcd = mnp$, also auch
$$hgfe = srq.$$

Wenn also Pyramiden von gleichen Höhen und Grundflächen in gleichen Entfernungen von den Spitzen gleichlaufend mit den Grundflächen geschnitten werden; so sind die Schnitte gleich.

81. Wenn man die Höhe oder jede Seite einer Fig. dreyseitigen Pyramide in mehrere gleiche Theile theilet, 346. durch alle Theilungspunkte mit der Grundfläche gleichlaufende 347. Ebenen 1.2.3 führet, und in den Seitenflächen oab und oac die mit oa Gleichlaufenden 2.4 und 3.5 zieht; so werden die Parallelogrammen 1.5, 1.4 und 3.4 die Seitenflächen der dreyseitigen Prismen, welche Fig. 346. der Pyramide **eingeschrieben**, Fig. 347. der Pyramide **umschrieben** heißen.

Schreibt man einer dreyseitigen Pyramide in gleicher Fig. Höhe Prismen ein und um; so ist jedes eingeschriebene 348. dem unmittelbar vorhergehenden umschriebenen wegen der beyden gemeinen Grundfläche gleich. Zieht man also die Summe aller eingeschriebenen von der Summe aller umschriebenen ab; so bleibt das letzte umschriebene abcdef ihr Unterscheid. Nach verdoppelter Anzahl der ein- und umschriebenen Prismen wird der Unterscheid abcghl ihrer Summen nur die Hälfte von dem vorigen abcdef, also unendlich klein oder = o, sobald die Anzahl jener Prismen unendlich groß ist; folglich wird in diesem Falle die Summe der eingeschriebenen Prismen der Summe der

umschriebenen, also auch der Pyramide gleich, als welche immer zwischen jenen Summen, solange ihr Unterscheid noch größer als o ist, bleibt.

Fig. 346. 349. Sind nun zwoen dreyseitigen Pyramiden o a b c und o m n p von gleichen Höhen und Grundflächen gleichhohe Prismen eingeschrieben; so sind jede zwey gleichweit von den Spitzen entfernte, wegen ihrer gleichen Höhen und Grundflächen gleich; also sind es auch in allen Fällen ihre Summen: diese Summen aber werden ihren zugehörigen Pyramiden gleich, sobald die Anzahl jener Prismen unendlich groß ist; also sind auch die Pyramiden gleich.

Dahero sind jede zwo dreyseitigen Pyramiden von gleichen Höhen und Grundflächen gleich.

Fig. 350. 82. Schneidet man ein dreyseitiges Prisma a b c d e f durch einen Scheitel b der untern und eine Seite f d der obern Grundfläche, sodann durch einen Scheitel d der obern und eine Seite a b der untern Grundfläche; so wird das Prisma in drey dreyseitige Pyramiden b f d e, d a b c und b f d a getheilt.

Die erste und zwote haben gleiche Grundflächen f d e und a b c und mit dem Prisma eine gemeine Höhe, die zwote und dritte haben ebenfalls gleiche Grundflächen a d c und a d f und eine gemeine Höhe, die Senkrechte, welche man von ihrer gemeinen Spitze b auf die Ebene a c d f zieht; folglich sind diese drey Pyramiden gleich.

Wenn also eine dreyseitige Pyramide d a b c und ein Prisma a b c d e f dieselbe Grundfläche a b c und eine gemeine Seite c d haben; so ist die Pyramide der dritte Theil des Prisma.

Fig. 351. 83. Ist die Grundfläche a c eines rechten Parallelepides a f ein Quadrat, und die Seite a h des Parallelepides der Seite a d der Grundfläche gleich; so sind auch die Seitenflächen Quadrate.

Ein rechtes Parallelepiped, welches in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen ist, heißt ein **Würfel** oder ein **Kubus.**

Nach-

Nachdem die Seite eines Würfels eine Klaster, ein Schuh, ein Zoll, eine Linie, oder ein Punkt ist; so wird der Würfel **Kubikklafter, Kubikschuh, Kubikzoll, Kubiklinie** oder **Kubikpunkt** genennt. Dieses sind die Maße, nach welchen man die körperlichen Inhalte bestimmet.

84. Setzet man die rechtwinklichte Grundfläche abcd eines rechten Parallelepipedes af sey genau in Quadratklastern, und die Höhe ah in Klastern eingetheilt, und durch jede Theilungslinie der Grundfläche eine mit den entgegengesetzten Seitenflächen, und durch jeden Theilungspunkt der Höhe eine mit der Grundfläche gleichlaufende Ebene geführt; so enthält jedes Parallelepiped von einer Klaster Höhe wie an soviel Kubikklastern, als die Grundfläche Quadratklastern hat, und der ganze Körper af besteht aus soviel dieser gleichen Parallelepipeden, als die Höhe ah Klastern enthält. Hat die Grundfläche a Quadratklaster, und die Höhe b Klaster; so enthält jedes Parallelepiped von einer Klaster Höhe a Kubikklaster und der ganze Körper b solche Parallelepipeden, also b mal a oder ab Kubikklaster. Hätte die Grundfläche dieses rechten Parallelepipedes a Quadratschuh, oder a Quadratzoll und die Höhe b Schuh oder b Zoll; so würde der körperliche Inhalt desselben ebenfalls ab Kubikschuh oder ab Kubikzoll betragen.

Fig. 352.

Man erhält also die Anzahl der Kubikklaftern, der Kubikschuhe oder der Kubikzolle eines rechten Parallelepipedes, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, wenn man die Anzahl der Quadratklastern, der Quadratschuhe oder der Quadratzolle seiner Grundfläche mit der Anzahl der Klastern, der Schuhe oder der Zolle seiner Höhe multiplicirt.

Weil die Grundfläche einer Kubikklaster 36 Quadratschuh, und die Höhe 6 Schuh hat; so enthält die Kubikklaster 6mal 36, oder 216 Kubikschuh, und aus ähnlichem Grunde der Kubikschuh 12mal 144 oder 1728 Kubikzoll, der Kubikzoll 12mal 144 oder 1728 Kubiklinien u. s. w.

85. Theilt man die Seite ah einer Kubikklafter af in 6 gleiche Theile, und führt durch jeden Theilungspunkt eine mit der Grundfläche gleichlaufende Ebene; so wird die Kubikklafter in 6 gleiche rechte Parallelepipeden wie an, wovon ein jedes eine Quadratklafter zur Grundfläche und einen Schuh zur Höhe hat, eingetheilt. Ein solches Parallelepiped heißt **Kubikklafterschuh**. Theilt man die Höhe am des Kubikklafterschuhs an in 12 gleiche Theile, und führt wieder durch jeden Theilungspunkt eine mit der Grundfläche gleichlaufende Ebene; so wird der Kubikklafterschuh in 12 **Kubikklafterzoll** getheilt. Ebenso läßt sich der Kubikklafterzoll in 12 **Kubikklafterlinien**, die Kubikklafterlinie in 12 Kubikklafterpunkte u. s. f. theilen.

Theilt man die Höhe eines Kubikschuhs in 12 Zoll, den Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Punkte, und führt durch alle Theilungspunkte mit der Grundfläche gleichlaufende Ebenen; so wird der Kubikschuh in 12 **Kubikschuhzolle**, der Kubikschuhzoll in 12 **Kubikschuhlinien**, die Kubikschuhlinie in 12 **Kubikschuhpunkte** eingetheilt.

Ebenso läßt sich der Kubikzoll in 12 **Kubikzolllinien**, die Kubikzolllinie in 12 **Kubikzollpunkte** u. s. f. theilen.

Fig. 355. 86. Wenn die rechtwinklichte Grundfläche ub des rechten Parallelepipedes tb 3 Quadratklafter, 2 Klafterschuh, 3 Klafterzoll, und die Höhe px 2 Klafter, 1 Schuh, 4 Zoll enthält, und man multiplicert

die Grundfläche $3^\circ \; 2' \; 3''$
mit der Höhe $2^\circ \; 1' \; 4''$

nach den Regeln der Multiplikation mit genannten Zahlen; so giebt

1tens $3'' \times 2$, 6 Kubikklafterzoll, das Parallelepiped ab
$2' \times 2$, 4 Kubikklafterschuh, das Parallelepiped cd
$3^\circ \times 2$, 6 Kubikklafter, das Parallelepiped ef.

Sodann ist 2tens

he

hc $\frac{1}{6}$ von eg, oder von 3 Kubikklafter
ka $\frac{1}{6}$ von cl, oder von 2 Kubikklafterschuh
mn $\frac{1}{6}$ von ao, oder von 3 Kubikklafterzoll.

Endlich ist 3tens pk $\frac{1}{3}$ von hc,
qm $\frac{1}{3}$ von ka, und
rs $\frac{1}{3}$ von mn.

Enthält die Grundfläche 3 Quadratschuh 2 Schuhzoll, 3 Schuhlinien, und die Höhe 2 Schuh, 1 Zoll, 4 Linien, und man multiplicirt

die Grundfläche $3'$ $2''$ $3'''$
mit der Höhe $2'$ $1''$ $4'''$;

so giebt 1tens

$3''' \times 2$, 6 Kubikschuhlinien, das Parallelepiped ab,
$2'' \times 2$, 4 Kubikschuhzoll, das Parallelepiped cd,
$3' \times 2$, 6 Kubikschuh, das Parallelepiped ef;

sodann ist 2tens

hc $\frac{1}{12}$ von eg, oder von 3 Kubikschuh,
ka $\frac{1}{12}$ von cl, oder von 2 Kubikschuhzoll,
mn $\frac{1}{12}$ von ao, oder von 3 Kubikschuhlinien.

Endlich ist 3tens pk $\frac{1}{3}$ von hc,
qm $\frac{1}{3}$ von ka, und
rs $\frac{1}{3}$ von mn.

Wenn man also nach den Regeln der Multiplikation mit genannten Zahlen erstlich die Grundfläche und sodann das Parallelepiped in Klaftern berechnet; so erhält man den körperlichen Inhalt desselben in Kubikklaftern, Kubikklafterschuhen, Kubikklafterzollen u. s. f. und berechnet man die Grundfläche und das Parallelepiped in Schuhen; so erscheint der körperliche Inhalt in Kubikschuhen, Kubikschuhzollen, Kubikschuhlinien u. s. f. Endlich wird der körperliche Inhalt in Kubikzollen, Kubikzolllinien, Kubikzollpunkten u. s. f. gefunden, wenn man sowohl die Grundfläche als das Parallelepiped in Zollen berechnet.

Die erste Methode ist bei Erdkörpern, die zwote bey Holz und Stein, und die dritte bey noch kostbarern Materien gebräuchlich.

87.

87. Jedes Parallelepiped ist einem gleichhohen rechten von gleicher und rechtwinklichter Grundfläche gleich: das Produkt der Höhe in die Grundfläche aber giebt den körperlichen Inhalt des letztern, also auch jenen des erstern.

Daher ist der körperliche Inhalt eines jeden Parallelepipedes das Produkt der Höhe in die Grundfläche desselben.

Fig. 342. Führt man durch die Seiten d c und e b eines dreyseitigen Prisma a b c d e f die Ebenen d g und e g gleichlaufend mit den Seitenflächen f b und f c; so ist der körperliche Inhalt des Parallelepipedes a h das Produkt der Höhe in das Parallelogramm a g, also der körperliche Inhalt seiner Hälfte, des gleichhohen Prisma a b c d e f, das Produkt der Höhe in die Hälfte des Parallelogramms a g, oder in das Dreyeck a b c.

Daher ist der körperliche Inhalt eines jeden dreyseitigen Prisma das Produkt der Höhe in die Grundfläche desselben.

Fig. 334. 361. Schneidet man jedes vielseitige Prisma durch die Seiten desselben, bis es in lauter dreyseitige eingetheilet wird; so ist der körperliche Inhalt eines jeden dreyseitigen das Produkt der gemeinen Höhe in ihre zugehörige Grundfläche, folglich der körperliche Inhalt ihrer Summe, oder des vielseitigen Prisma das Produkt der Höhe in die Summe aller jener Grundflächen oder in die Grundfläche des vielseitigen Prisma.

Daher ist allgemein der körperliche Inhalt eines jeden Prisma dem Produkte der Höhe in die Grundfläche desselben gleich.

Fig. 350. 88. Zieht man durch die Scheitel a und b der Grundfläche einer dreyseitigen Pyramide d a b c mit der Seite c d die Gleichlaufenden a f und b e, bis sie die mit der Grundfläche a b c gleichlaufende Ebene d e f begegnen; so ist die Pyramide d a b c ein Drittel des dreyseitigen Prisma a b c d e f. Dieses ist dem Produkte der

ge-

gemeinen Höhe in die Grundfläche abc, also jene dem Produkte eines Drittels dieser Höhe in dieselbe Grundfläche gleich.

Daher ist der körperliche Inhalt einer dreyseitigen Pyramide das Produkt ihrer Grundfläche in ein Drittel der Höhe.

Schneidet man eine vielseitige Pyramide oab durch ihre Spitze, und die Scheitel ihrer Grundfläche, bis sie in lauter dreyseitige eingetheilet wird; so ist der körperliche Inhalt einer jeden dreyseitigen das Produkt ihrer zugehörigen Grundfläche in ein Drittel der gemeinen Höhe, also jener ihrer Summe oder der vielseitigen das Produkt der Summe aller jener Grundflächen oder der Grundfläche der vielseitigen in ein Drittel ihrer Höhe. Fig. 362.

Daher ist allgemein der körperliche Inhalt einer jeden Pyramide dem Produkte ihrer Grundfläche in ein Drittel ihrer Höhe gleich.

89. Wenn eine gerade Linie cd die Ebene eines Kreises in dem Mittelpunkte c schneidet, und eine mit cd gleichlaufende Gerade ab, welche den Umfang bfgh durchläuft, schneidet jede mit der Ebene des Kreises gleichlaufende Ebene in aekl; so ist wegen der Parallelogrammen abcd und efcd die Gerade da = cb = cf = de, also aekl ein dem Kreise afgh gleicher Kreis, dessen Mittelpunkt d ist. Der Körper, den diese zween Kreise und die durch ab beschriebene Oberfläche begränzen, heißt ein **Cylinder**, jede Gerade ab seine **Seite**, die Gerade cd seine **Achse**, die zween gleichlaufenden Kreise seine **Grundflächen**, und die Entfernung der Grundflächen seine **Höhe**. Fig. 356. 357.

Schneidet man einen Cylinder durch die Achse: so ist der Schnitt abgk ein Parallelogramm: und schneidet man denselben Gleichlaufend mit der Grundfläche; so ist der Schnitt xyzu ein den Grundflächen gleicher Kreis. Fig. 356.

Nachdem die Achse eines Cylinders senkrecht oder schief auf desselben Grundfläche steht, so heißt derselbe

Fig.

Fig. 357. ein **rechter** oder Fig. 356. ein **schiefer** Cylinder.

Der Kreis kann allemal als ein ordentliches Vieleck von unendlich vielen Seiten, also der Cylinder als ein Prisma, dessen Grundfläche ein solches Vieleck ist, angesehen werden.

Daher ist der körperliche Inhalt eines jeden Cylinders das Produkt der Höhe in die Grundfläche desselben.

Ebendieses erhellet auch, wenn man sich den Cylinder in unendlich viele dreyseitige Prismen wie bcfeda eingetheilt vorstellt; indem der körperliche Inhalt eines jeden dieser Prismen, also auch jener des Cylinders, ihrer Summe, dem Produkte seiner Höhe in die zugehörige Grundfläche gleich ist.

Fig. 358. 359. 90. Wenn eine Gerade cd die Ebene eines Kreises in dem Mittelpunkte c schneidet, und eine Gerade da drehet sich um den Punkt d nach dem Umfange aebf; so heißt der Körper, welchen der Kreis und die durch ad beschriebene Oberfläche begränzen, ein **Kegel**. Jene Gerade cd wird seine **Achse**, jede Gerade da seine **Seite**, der Kreis aebf seine **Grundfläche**, und die Entfernung der Spitze d von der Grundfläche seine **Höhe** genennt.

Nachdem die Achse dc eines Kegels senkrecht oder schief auf die Grundfläche steht; so heißt derselbe Fig. 359. ein **rechter** oder Fig. 358. ein **schiefer** Kegel.

Schneidet man einen Kegel durch die Achse; so ist der Schnitt adb ein Dreyeck, und zwar in dem rechten Kegel allzeit ein gleichschenklichtes. Daher wird der rechte Kegel auch **gleichseitig** und der schiefe **ungleichseitig** genennt.

Schneidet man den Kegel durch eine mit der Grundfläche gleichlaufende Ebene mqnp, und durch die Ebenen dca und dce; so sind die Durchschnitte ca und om, ce und op gleichlaufend, also die Dreyecke dca und dom, dce und dop ähnlich, folglich verhält sich

ac : om = cd : od und
ce : op = cd : od, also auch
ac : om = ce : op; es ist aber
ac = ce, folglich auch
om = op.

Daher ist jeder mit der Grundfläche eines Kegels gleichlaufende Schnitt ein Kreis.

Der Kegel kann allemal als eine Pyramide, deren Grundfläche ein ordentliches Vieleck von unendlich vielen Seiten ist, angesehen werden.

Daher ist der körperliche Inhalt eines Kegels dem Produkte der Grundfläche in ein Drittel der Höhe gleich.

Ebendieses erhellet auch, wenn man den Kegel als die Summe unendlich vieler dreyseitigen Pyramiden wie dace betrachtet: indem jede dieser Pyramiden, folglich auch der Kegel, ihre Summe, dem Produkte der zugehörigen Grundfläche in ein Drittel der Höhe gleich ist.

91. Schneidet man ein Prisma af senkrecht auf die Seiten desselben; so wird jede Seite mn des Schnittes mnop die Höhe, und jede Seite ed des Prisma die Grundlinie des Parallelogrammes hd. Jede Seitenfläche eines Prisma ist also dem Produkte der Seite des Prisma in die zugehörige Seite jenes Schnittes, folglich die Summen aller Seitenflächen, oder die Oberfläche des Prisma ohne die beeden Grundflächen dem Produkte der Seite des Prisma in den Perimeter ebenjenes Schnittes gleich. Fig. 360.

Im rechten Prisma abcd wird der auf seine Seiten senkrechte Schnitt mn der Grundfläche gleich; also ist die Oberfläche eines rechten Prisma ohne die beeden Grundflächen das Produkt des Perimeters der Grundfläche in die Höhe des Prisma, und ebendaher die Oberfläche eines rechten Cylinders ohne die beeden Grundflächen das Produkt des Umfanges der Grundfläche in die Höhe desselben. Fig. 361. 357.

Fig. 362. 359. Die Oberfläche einer Pyramide oab ohne ihre Grundfläche ist die Summe aller Dreyecke, welche ihre Seitenflächen ausmachen. In einer rechten Pyramide sind die Grundlinien dieser Dreyecke oder die Seiten der Grundfläche, und ihre Höhen oder die Entfernungen der Spitze von den Seiten der Grundfläche gleich; also ist die Oberfläche einer rechten Pyramide ohne ihre Grundfläche das Produkt des Perimeters der Grundfläche in die halbe Entfernung der Spitze von einer Seite der Grundfläche, und ebendaher die Oberfläche eines rechten Kegels dab ohne seine Grundfläche das Produkt des Umfanges der Grundfläche in die halbe Seite desselben.

92. Weil Prismen und Cylinder den Produkten ihrer Grundflächen in ihre Höhen, Pyramiden und Kegel aber den dritten Theilen ebendieser Produkte gleich sind; so verhalten sich jede zwey Prismen, jede zween Cylinder, ein Prisma und ein Cylinder, jede zwo Pyramiden, jede zween Kegel, eine Pyramide und ein Kegel, wie die Produkte ihrer Grundflächen in ihre Höhen, wie ihre Grundflächen, wenn die Höhen gleich sind, und wie ihre Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind: ferner werden ebendiese Körper gleich, wenn ihre Grundflächen sich verkehrt wie ihre Höhen verhalten: und sind sie gleich; so verhalten sich ihre Grundflächen verkehrt, wie ihre Höhen.

Ebenso verhalten sich die Oberflächen rechter Prismen und Cylinder, rechter Pyramiden und Kegel, wie die angezeigten Produkte, denen sie gleich sind, und wie jede zween Faktoren dieser Produkte, wenn die andern zween gleich sind: ferner werden ebendiese Oberflächen gleich, wenn ihre Faktoren in einem verkehrten Verhältnisse stehen: und sind jene gleich; so stehen diese auch allemal in einem verkehrten Verhältnisse.

Fig. 363. 93. Ist ein dreyseitiges rechtes Prisma abcmnf durch eine auf die Seiten desselben schiefe Ebene def geschnitten, und man schneidet dieses schief abgeschnittene rechte Prisma abcdef durch einen Punkt d der obern, und eine Seite ab der untern Grundfläche in zwo Pyramiden

dabc

dabc und dabef, welche die Spitze d gemein haben; so ist, weil die Ebene abc auf die Gerade dc und die Ebene fb senkrecht ist, dc gleichlaufend mit der Ebene fb: zieht man also cg senkrecht auf ab; so ist cg auch senkrecht auf die Ebene fb, und der Höhe dh der Pyramide dabef gleich. Ferner ist ab senkrecht auf die gleichlaufenden Seiten af und be des Trapezes fb. Daher wird 1tens die Grundfläche abc

$$= \frac{ab \times cg}{2},$$

und die Pyramide dabc

$$= \frac{cd \times ab \times cg}{6}:$$

2tens die Grundfläche abef

$$= \frac{af \times ab + be \times ab}{2},$$

und die Pyramide dabef

$$= \frac{af \times ab \times cg + be \times ab \times cg}{6};$$

folglich das schief abgeschnittene rechte Prisma abcdef

$$= \frac{cd \times ab \times cg + af \times ab \times cg + be \times ab \times cg}{6}$$

$$= \left(\frac{cd + af + be}{3}\right) \times \frac{ab \times cg}{2}.$$

Ist ein dreyseitiges Prisma mnoedf an beyden Enden schief abgeschnitten, und man schneidet es durch die Ebene abc senkrecht auf seine Seiten; so ist nach Vorigem das schief abgeschnittene rechte Prisma abcdef Fig. 364.

$$= \left(\frac{cd + af + be}{3}\right) \times \frac{ab \times cg}{2}, \text{ und das}$$

schief abgeschnittene rechte Prisma abcnom

$$= \left(\frac{cn + am + bo}{3}\right) \times \frac{ab \times cg}{2}, \text{ folglich das}$$

an beyden Enden abgeschnittene Prisma m n o e d f

$$= \left(\frac{dn + fm + eo}{3}\right) \times \frac{ab \times cg}{2}.$$

Daher ist jedes schief abgeschnittene dreyseitige Prisma dem Produkte des auf seine Seiten senkrechten Schnittes in das Drittel der Summe seiner Seiten gleich.

Wird in einem rechten dreyseitigen, auf eine Seite schief abgeschnittenen Prisma f a c d e b, eine Seite c d = o so entsteht eine vierseitige Pyramide d a b e f, und werden zwey Seiten a f und c b = o eine dreyseitige d a b c.

Der Inhalt dieses Prisma ist aber

$= \frac{(cd + af + bc) \times ab \times cg}{6}$ setzt man nun eine Seite c d = o so wird $\frac{(af + bc) \times ab \times cg}{6} =$ dem Inhalt der vierseitigen Pyramiden, und werden zwey Seiten f a und b e = o so ist $\frac{cd \times ab \times cg}{6} =$ jenem der dreyseitigen.

Jede vier oder dreyseitige Pyramide kann also in diesem Fall, als ein rechtes dreyseitiges schief abgeschnittenes Prisma, wovon eine oder zwo Seiten = o sind, berechnet werden.

Fig. 365. 94. Ist ein rechter Cylinder a x durch eine Ebene a g schief auf seine Achse m z geschnitten, und man führt durch diese Achse eine auf die Ebene a g senkrechte Ebene a y x d, und zieht aus jedem Punkte p des Schnittes a p c t auf den Durchschnitt a c jener zwo aufeinander senkrechten Ebenen a x und a g in dieser die Senkrechte p r; so wird p r senkrecht auf die Ebene a x, also gleichlaufend mit der Grundfläche y q x; folglich sind die auf die Grundfläche senkrechten Geraden p q und r s gleich; r s aber ist größer als c x und kleiner als a y, also ist auch

p q

pq größer als cx und kleiner als ay: folglich ist ay die größte, und cx die kleinste aus allen Senkrechten, welche man von dem Schnitte apct auf die Grundfläche yqx ziehen kann.

Sind ferner die Ebenen al und ck gleichlaufend mit der Grundfläche yqx, also senkrecht auf die Ebene ax; so sind auch ihre Durchschnitte ah und cg mit der Ebene ag senkrecht auf die Ebene ax. Stellt man also den Körper dcpat so in den Körper bapct, daß die Punkte d und a und die Grundfläche des obern mit den Punkten b und c und der Grundfläche des untern übereinkommen; so fallen auch ihre Achsen mo und no, also ihre Oberflächen dcpat, und bapct, die Dreyecke cda und abc, die auf diese Dreyecke senkrechten Durchschnitte ah und cg, und wegen der gleichen Wechselwinkel cad und acb, ihre schiefen Schnitte cpat und apct zusammen; folglich sind diese Körper und ihre Oberflächen gleich.

Schneidet man also einen schief abgeschnittenen rechten Cylinder durch den niedrigsten Punkt c des schiefen Schnittes apct; so wird der körperliche Inhalt des Abschnittes abc dem Produkte der Grundfläche in die Hälfte des Unterscheides ab der größten und kleinsten Seiten ay und cx, und die Oberfläche desselben ohne die Grundfläche dem Produkte des Umfanges der Grundfläche in die Hälfte eben jenes Unterscheides gleich.

Schneidet man einen an beyden Enden schief abgeschnittenen rechten Cylinder ax durch die Punkte c und x senkrecht auf die Achse; so findet man den körperlichen Inhalt oder die Oberfläche desselben, wenn man die körperlichen Inhalte oder die Oberflächen der zum Vorschein kommenden Theile berechnet und zusammen addirt. Fig. 366.

95. Ist eine Pyramide oabc durch eine mit ihrer Grundfläche gleichlaufende Ebene def geschnitten; so heißt der Körper abcdef eine **gestutzte Pyramide**. Fig. 367.

Schneidet man eine gestutzte Pyramide abcdef durch einen Punkt b der untern, und eine Seite df der obern Grundfläche, und sodann durch einen Punkt d der obern, und eine Seite ab der untern Grundfläche; so wird die gestutzte Pyramide in drey Pyramiden bdef, dabc und badf geschnitten. Die erste bdef und zwote dabc haben mit der gestutzten eine gemeine Höhe; also verhalten sie sich wie ihre ähnlichen Grundflächen def und abc, oder wie die Quadrate jeder zwo gleichnamigen Seiten df und ac derselben. Die zwote badc und dritte badf haben ebenfalls dieselbe Höhe, die Senkrechte, welche man von der gemeinen Spitze b auf die Ebene fc ihrer Grundflächen adc und adf zieht; folglich verhalten sie sich wie ihre Grundflächen adc und adf, oder wegen der gemeinen Höhe dieser Dreyecke, wie die Grundlinien ac und df.

Es verhält sich also

1tens $bdef : dabc = \overline{df}^2 : \overline{ac}^2$

2tens $dabc : badf = ac : df$,

und (diese zwo Proportionen Glied für Glied in einander multiplicirt)

3tens $bdef : badf = df : ac$.

Setzet man nun alle diese drey Pyramiden haben mit der gestutzten dieselbe Höhe, und die Grundfläche der dritten sey x; so verhalten sich ihre Grundflächen, wie die Pyramiden, also

1tens $def : abc = \overline{df}^2 : \overline{ac}^2$

2tens $abc : x = ac : df$, und

3tens $def : x = df : ac$.

Eine gestutzte dreyseitige Pyramide ist also einer gleichhohen Pyramide gleich, deren Grundfläche aus der obern mehr der untern Grundfläche der gestutzten Pyramide mehr der vierten proportionirten Fläche zu einer Seite der obern, der gleichnamigen Seite der untern Grundfläche, und der obern Grundfläche, oder zu einer Seite der untern, der gleich-

gleichnamigen Seite der obern Grundfläche, und der untern Grundfläche bestehet.

Oder nennt man die Höhe der weggeschnittenen Pyramide x so verhält sich

cb : de = om : x also auch

cb — de : de = om — x : x oder

cb — de : de = mn : x

addirt man x zu der bekannten Höhe der gestutzten, so ist diese Summe = der Höhe der ganzen Pyramide.

Berechnet man daher die ganze, und die weggeschnittene, so giebt ihr Unterscheid die gestutzte Pyramide.

Weil alle Seiten einer jeden gestutzten Pyramide cabd in einem und demselben Punkte o zusammenlaufen; so läßt sich jede vielseitige gestutzte ebenso, wie jede vielseitige Pyramide in dreyseitige eintheilen. Daher passet der vorige Schluß auch auf jede vielseitige gestutzte Pyramide. Fig. 368.

96. Ist ein Kegel oab durch eine mit seiner Grundfläche gleichlaufende Ebene cd geschnitten; so heißt der Körper cabd ein **gestutzter** Kegel. Fig. 369.

Weil der gestutzte Kegel allemal als eine gestutzte Pyramide, deren Grundflächen ordentliche Vielecke von unendlich vielen Seiten sind, angesehen werden kann; so ist der gestutzte Kegel einem gleichhohen Kegel gleich, dessen Grundfläche aus der obern, mehr der untern Grundfläche des gestutzten Kegels mehr einer vierten proportionirten Fläche zu dem Durchmesser der obern, dem Durchmesser der untern Grundfläche, und der obern Grundfläche, oder zu dem Durchmesser der untern, dem Durchmesser der obern Grundfläche, und der untern Grundfläche besteht.

97. Die Oberfläche einer gestutzten Pyramide ohne die beeden Grundflächen ist die Summe aller jener Trapezen, welche ihre Seitenflächen ausmachen. Jedes Trapez gefh ist dem Produkte der mit der Grundlinie ef Gleichlaufenden mn, welche die Seite ge halbirt, in die Entfernung xy der zwo gleichlaufenden Seiten gh und ef gleich. Fig. 368.

gleich. In einer gestutzten rechten Pyramide sind die Seitenflächen, jene Trapezen, vollkommen gleich; folglich die Entfernungen x y jeder zwo gleichlaufenden Seiten dieselben. Also ist die Oberfläche einer gestutzten rechten Pyramide, ohne die beeden Grundflächen, das Produkt der Entfernung x y der gleichlaufenden Seiten g h und e f, in den Perimeter des mit der Grundfläche gleichlaufenden Schnittes o m n p, welcher eine Seite g e der gestutzten Pyramide halbirt.

Fig. 369. Ebendaher ist auch die Oberfläche eines gestutzten rechten Kegels c a b d, das Produkt einer Seite c a in den Umfang des mit der Grundfläche gleichlaufenden Schnittes m n, welcher jene Seite halbirt.

Fig. 370. 98. Drehet sich ein Halbkreis a d b um den unbeweglichen Durchmesser a b, bis er wieder in seine vorige Lage kömmt; so beschreibt der halbe Umfang a d b eine krumme Fläche, deren alle Punkte von des Halbkreises Mittelpunkte c gleichweit abstehen, und der Halbkreis a d b einen Körper, welcher in jene Fläche eingeschlossen wird. Dieser Körper heißt eine **Kugel**, der Punkt c ihr **Mittelpunkt**, und jene krumme Fläche ihre **Oberfläche**. Jede Gerade c d, welche von dem Mittelpunkte bis an die Oberfläche gezogen ist, wird ein **Halbmesser**, und jede Gerade e d, welche durch den Mittelpunkt beederseits bis an die Oberfläche geht, ein **Durchmesser** der Kugel genennt.

Weil alle Punkte der Oberfläche einer Kugel von ihrem Mittelpunkte gleichweit abstehen; so sind alle Halbmesser und alle Durchmesser der Kugel gleich.

Fig. 371. Nachdem die Entfernung eines Punktes a, g oder f von der Kugel Mittelpunkte c dem Halbmesser gleich, größer oder kleiner als derselbe ist; so liegt dieser Punkt a in der Oberfläche, g außerhalb oder f innerhalb der Kugel.

Fig. 371. 99. Aus allen Geraden, welche man von dem Mittelpunkte der Kugel auf eine gerade Linie m n ziehen kann, ist die Senkrechte die kleinste. Nachdem also diese Senkrechte c a, c g oder c f dem Halbmesser der Kugel gleich,

größer

größer oder kleiner als derselbe ist; so berührt jene gerade Linie mn die Oberfläche der Kugel in dem einzelnen Punkte a, begegnet diese Oberfläche nirgends, oder schneidet dieselbe in jenen zween Punkten p und q, welche in der Linie mn beederseits der Senkrechten cf ebenso weit als a von c entfernet sind.

Zieht man also 1tens durch jeden Punkt a der Oberfläche auf den Halbmesser ca eine Senkrechte mn; so ist diese eine Tangente zur Kugel: zieht man 2tens auf den Berührungspunkt a der Tangente mn einen Halbmesser ca; so ist dieser aus allen Geraden, welche man von c auf mn ziehen kann, die kleinste, also senkrecht auf die Tangente: und zieht man 3tens in der Ebene cmn durch den Berührungspunkt a auf die Tangente mn eine Senkrechte; so macht sie mit dem Halbmesser ca nur eine und dieselbe Linie aus, also geht sie durch den Mittelpunkt der Kugel.

Schneidet eine gerade Linie mn die Oberfläche der Kugel in den Punkten p und q; so ist cpq ein gleichschenklichtes Dreyeck. Ist also 1tens cf senkrecht auf mn; so ist $fp = fq$, $cf < cp$, und folglich der Punkt f innerhalb der Kugel: ist 2tens $fp = fq$; so ist cf senkrecht auf mn: und ist 3tens $fp = fq$, und man zieht in der Ebene cpq durch f eine Senkrechte auf mn; so geht diese durch den Mittelpunkt der Kugel.

100. Aus allen Geraden, welche man von dem Mittelpunkte der Kugel auf eine Ebene mn ziehen kann, ist die Senkrechte die kleinste. Nachdem also diese Senkrechte ca, cg oder cf dem Halbmesser der Kugel gleich, größer oder kleiner als derselbe ist; so berührt jene Ebene mn die Oberfläche in einem einzelnen Punkte a, begegnet die Kugel nirgends, oder schneidet dieselbe. Fig. 372.

Zieht man also 1tens durch einen Punkt a der Oberfläche auf den Halbmesser ca eine senkrechte Ebene mn; so berührt diese die Kugel in dem einzelnen Punkte a: zieht man 2tens auf den Berührungspunkt a einer Ebene mn den Halbmesser ca; so ist dieser aus allen Geraden, wel-

che

che man von c auf die Ebene m n ziehen kann, die kleinste, also senkrecht auf die Ebene: und zieht man 3tens durch den Berührungspunkt a auf die Ebene m n die Senkrechte; so macht diese mit dem Halbmesser c a nur eine und dieselbe Linie aus, also geht sie durch den Mittelpunkt der Kugel.

Schneidet eine Ebene m n die Kugel, und man führt durch den Mittelpunkt c eine auf die Ebene m n senkrechte Ebene c p q, und in dieser die Gerade c f senkrecht auf den Durchschnitt p q; so ist c f auch senkrecht auf die Ebene m n und der Punkt f innerhalb der Kugel: und zieht man ferner durch die Senkrechte c f und jeden Punkt h des der Ebene m n und der Oberfläche gemeinen Durchschnittes p h q eine Ebene c f h; so haben die bey f rechtwinklichten Dreyecke c f h und c f p die Hypothenusen c h und c p gleich, und die Kathede c f gemein; also sind auch ihre zwo übrigen Katheden f h und f p gleich.

Daher ist jeder Kugelschnitt p h q ein Kreis, dessen Mittelpunkt f in dem auf die Ebene des Schnittes senkrechten Halbmesser der Kugel liegt.

Zieht man also 1tens von dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene eines Kugelschnittes die Senkrechte; so geht diese durch den Mittelpunkt des Schnittes: zieht man 2tens durch den Mittelpunkt eines Kugelschnittes und der Kugel Mittelpunkt eine gerade Linie; so ist diese senkrecht auf des Schnittes Ebene: und zieht man 3tens durch den Mittelpunkt eines Kugelschnittes die Senkrechte auf die Ebene desselben; so geht diese auch durch den Mittelpunkt der Kugel.

Fig. 372. 101. Geht ein Kugelschnitt a p b q durch den Mittelpunkt c der Kugel; so werden die Halbmesser des Schnittes c p, c b, c q &c. den Halbmessern der Kugel gleich.

Alle Kugelschnitte, welche durch der Kugel Mittelpunkt gehen, sind also gleiche Kreise.

Geht

Geht der Kugelschnitt apbq durch den Mittelpunkt c, und ist senkrecht auf den Kugelschnitt phq; so ist die auf den Durchschnitt pq Senkrechte cf auch senkrecht auf die Ebene des Schnittes phq, also f der Mittelpunkt ebendieses Schnittes; folglich wird der Durchschnitt pq der Durchmesser des Kugelschnittes phq und zugleich eine Sehne des Kugelschnittes apbq.

Daher sind die Kugelschnitte, welche mit der Kugel einen gemeinen Mittelpunkt haben, größer als jede andere.

Deßwegen werden jene die **größten** und diese die **kleinern** Kreise der Kugel genennt.

102. Zieht man auf jede zween kleinern Kreise agb und mhn zween senkrechte größte ebfa und emnf und in diesen auf die Durchschnitte ab und mn die Senkrechten cd und cq; so ist der Kugelschnitt agb dem Kugelschnitte mhn gleich, oder kleiner als derselbe, nachdem der Durchschnitt ab dem Durchschnitte mn gleich, oder kleiner als derselbe ist, also nachdem die Senkrechte cd der Senkrechten cq gleich oder größer als dieselbe wird. Fig. 373.

Jede zween kleinern Kreise, welche gleichweit von der Kugel Mittelpunkte abstehen, sind also gleich: und ist einer weiter als der andere von ebendemselben entfernt; so ist dieser größer als jener.

Ferner geht ein größter Kreis der Kugel allemal durch der Kugel Mittelpunkt, jede zween gleiche kleinere sind gleichweit, und der kleinste aus jeden zween ungleichen ist weiter als der andere von ebendemselben entfernt.

103. Ist eine Kugel nach einem größten Kreise adb geschnitten, und man drehet den untern Theil afb um den unbeweglichen Durchmesser ab, bis die Grundflächen beeder Theile übereinkommen; so fallen alle Punkte der Oberfläche des untern Theiles mit den Punkten der Oberfläche des obern zusammen; also sind diese zween Theile der Kugel einander vollkommen gleich. Fig. 374.

Jeder

Jeder größte Kreis der Kugel theilet also dieselbe in zwo vollkommen gleiche **Halbkugeln.**

Ist eine Kugel nach einem kleinern Kreise g h geschnitten; so heißen die Theile g e h und g f h **Abschnitte** der Kugel: und ist eine Kugel durch zwo gleichlaufende Ebenen g h und m n geschnitten; so heißt der Theil der Kugel, welcher zwischen den beeden gleichlaufenden Ebenen enthalten ist, ein **Ausschnitt** der Kugel: die Oberfläche eines Ausschnittes oder der zwischen zwoen gleichlaufenden Ebenen begriffene Theil der Oberfläche der Kugel wird eine **Zone** genennt.

Ist c e auf die Ebenen der Kugelschnitte a b, g h und m n senkrecht; so heißt c e die **Höhe** der Halbkugel a e b, x y die **Höhe** des Ausschnittes g m n h, und e x die **Höhe** des Abschnittes m e n.

Fig. 377. Drehet sich ein Halbmesser c a um den Mittelpunkt c nach dem Umfange eines kleinern Kreises a o b; so wird der Körper, welchen die durch c a beschriebene Fläche von der Kugel ausschneidet ein **Sektor** der Kugel genennt.

Fig. 375. 104. Ist a b d c ein Quadrat, aus c ein Bogen a d beschrieben, und man halbirt ein beliebiges Stück f g des Halbmessers c a in l, zieht f h, l e und g k senkrecht auf a c, sodann den Halbmesser c e, die Tangente e q und noch m p senkrecht auf g k; so haben die Dreyecke m p n und e l c alle drey Seiten senkrecht aufeinander, also die Winkel, welche den aufeinander senkrechten Seiten gegenüberstehen, gleich; folglich verhält sich

$$mn : mp = ec : el, \text{ oder}$$

weil das Verhältniß der Umfänge zweener Kreise dem Verhältnisse ihrer Halbmesser gleich ist,

$$mn : mp = \text{Umf. } ec : \text{Umf. } el; \text{ also ist}$$

$$mn \times \text{Umf. } el = mp \times \text{Umf. } ec, \text{ oder}$$

$$mn \times \text{Umf. } el = hk \times \text{Umf. } gk.$$

Drehet sich die ganze Figur um den unbeweglichen Halbmesser c a; so beschreibt das Quadrat a c d b einen rechten Cylinder, der Quadrant a c d eine Halbkugel, welche diesem Cylinder eingeschrieben ist, das Rechteck f g k h

einen Cylinder, das Trapez fgnm einen gestutzten rechten Kegel, und das vermischtlinichte Viereck fgsr einen Ausschnitt der Kugel.

Es ist aber die Oberfläche des gestutzten rechten Kegels

fgnm = mn × Umf. el,

und die Oberfläche des rechten Cylinders

fgkh = kh × Umf. gk;

also sind diese Oberflächen gleich. Wird nun fg unendlich klein; so fällt die Tangente mn mit dem Bogen rs zusammen, also wird die Oberfläche des Ausschnittes fgsr der Kugel, und die Oberfläche des gestutzten Kegels fgnm nur eine und dieselbe; folglich ist in diesem Falle die Oberfläche des Ausschnittes fgsr der Oberfläche des zugehörigen Cylinders fgkh gleich.

Ist nun ac in unendlich kleine Theile getheilt, und durch jeden Theilungspunkt auf ac eine senkrechte Ebene geführt; so wird die Oberfläche eines jeden Ausschnittes der Kugel, welcher zwischen jeden zwo Ebenen enthalten ist, der Oberfläche des Cylinders, welcher zwischen denselben Ebenen liegt, gleich; also ist auch die Summe der Oberflächen aller jener Ausschnitte der Kugel, oder die Oberfläche der Halbkugel, der Summe der Oberflächen aller zugehörigen Cylinder, oder der Oberfläche des Cylinders acdb, welchem die Halbkugel eingeschrieben ist, gleich.

Die Oberfläche des Cylinders acdb aber ist das Produkt aus dem Umfange des größten Kreises der Kugel in den Halbmesser, und der größte Kreis der Kugel das Produkt aus dem halben Umfange in denselben Halbmesser.

Daher ist die Oberfläche der Halbkugel das Zweyfache, und die Oberfläche der ganzen Kugel das Vierfache des größten Kreises der Kugel.

105. Ist die Höhe fg eines jeden Ausschnittes fgsr oder die Höhe af eines jeden Abschnittes afr der Kugel samt dem zugehörigen Cylinder fgkh oder afhb durch unendlich viele auf ebendiese Höhe senkrechte Ebene geschnitten; so wird wieder die Oberfläche eines jeden aus den unendlich kleinen Ausschnitten der Kugel der Oberflä- (Fig. 375.)

che

che des zugehörigen unendlich kleinen Cylinders, also auch die Summe der Oberflächen aller jener Ausschnitten der Summe der Oberflächen aller dieser Cylinder gleich.

Daher ist die Oberfläche eines jeden Ausschnittes fgsr oder Abschnittes afr der Oberfläche des zugehörigen Cylinders fgkh, oder afhb, also dem Produkte seiner Höhe fg oder af in den Umfang des größten Kreises der Kugel gleich.

Fig. 374. 106. Zieht man ce senkrecht auf den Kugelschnitt mn, durch ce einen größten Kreis aebf, und in diesem die Sehne em; so verhält sich

$$ex : em = em : ef,$$

$$ex : \frac{em}{2} = em : ce, \text{ oder}$$

$$ex : \frac{em}{2} = \text{Umf. } em : \text{Umf. } ce; \text{ also ist}$$

$$ex \times \text{Umf. } ce = \frac{em \times \text{Umf. } em}{2}.$$

Daher ist die Oberfläche eines Abschnittes men der Kugel einem mit dem Halbmesser em beschriebenen Kreise gleich.

Nähert sich der Kugelschnitt mn dem Mittelpunkte der Kugel, bis er endlich mit dem größten Kreise adb zusammen fällt, und der Abschnitt men der Halbkugel aeb gleich wird; so verhält sich das Quadrat von ea zu dem Quadrat von ce wie 2 : 1, also auch der Kreis von dem Halbmesser ea zu dem Kreise von dem Halbmesser ce wie 2 : 1; und nähert sich der Kugelschnitt mn ferner dem Punkte f, bis er endlich durch f geht, folglich die Sehne em mit dem Durchmesser ef zusammen fällt, und der Abschnitt men der ganzen Kugel gleich wird; so verhält sich

$ef : ce = 2 : 1$, also der Kreis von dem Halbmesser ef zu dem Kreise von dem Halbmesser ce wie 4 : 1.

4 : 1. Welches mit Nro. 104. vollkommen übereinstimmt.

107. Nimmt man in der Oberfläche einer Kugel was immer für drey Punkte a, b und d an, und zieht durch jede zween und den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene; so schliessen diese Ebenen einen Körper c a b d ein, der als eine Pyramide, welche ihre Grundfläche a b d in der Oberfläche, und ihre Spitze in dem Mittelpunkte der Kugel hat, angesehen werden kann, sobald die Fläche a b d unendlich klein wird. Fig. 376.

Stellet man sich nun vor, die Kugel m e a f, die Halbkugel e a f, oder jeder Sektor c n a o der Kugel sey aus lauter solchen unendlich kleinen Pyramiden zusammengesetzet; so wird der körperliche Inhalt einer jeden aus diesen Pyramiden, also auch jener ihrer Summe (der Kugel, der Halbkugel oder des Sektors,) dem Produkte ihrer zugehörigen Grundfläche in ein Drittel des Halbmessers der Kugel gleich.

Daher ist der körperliche Inhalt der Halbkugel das Produkt des größten Kreises in 2 Drittel des Halbmessers, und jener der ganzen Kugel das Produkt des größten Kreises in 2 Drittel des Durchmessers.

Der körperliche Inhalt des der Halbkugel umschriebenen Cylinders h e f g aber ist das Produkt des größten Kreises in den Halbmesser, und jener des der ganzen Kugel umschriebenen Cylinders h k l g das Produkt des größten Kreises in den Durchmesser.

Also ist die Halbkugel oder die ganze Kugel zweenen dritten Theilen des ihr umschriebenen Cylinders gleich.

Berechnet man den Sektor c a d b und den Kegel c a b; so giebt dieser von jenem abgezogen den Abschnitt a d b, und berechnet man den Abschnitt e d f und den Ab- Fig. 377.

Abschnitt adb; so giebt ihr Unterscheid den Ausschnitt eabf.

108. Weil die Oberfläche einer Kugel das Vierfache ihres größten Kreises ist; so verhalten sich die Oberflächen jeder zwo Kugeln wie ihre größten Kreise, folglich wie die Quadrate ihrer Halbmesser: und weil jede Kugel dem Produkte ihrer Oberfläche in ein Drittel ihres Halbmessers gleich ist; so ist das Verhältniß jeder zwo Kugeln aus dreyen dem Verhältnisse ihrer Halbmesser gleichen Verhältnissen zusammengesetzet.

Daher verhalten sich jede zwo Kugeln wie die Würfel ihrer Halbmesser, oder wie die Würfel ihrer Durchmesser.

Verhalten sich z. B. die Durchmesser zwoer Kugeln wie 2 : 1; so verhalten sich ihre Oberflächen wie 4 : 1, und ihre körperlichen Inhalte wie 8 : 1: oder ist der Durchmesser der ersten Kugel 3mal in jenem der zwoten enthalten; so ist die Oberfläche der ersten 9mal in jener der zwoten, und die erste Kugel 27mal in der zwoten begriffen.

109. Das Verhältniß 7 : 22 des Durchmessers zu dem Umfange eines Kreises vorausgesetzet, findet man aus einem jeden dieser drey Stücke (dem Durchmesser a, der Oberfläche b, und dem körperlichen Inhalte c einer Kugel) die zwey übrigen.

Denn ist 1tens a gegeben; so wird der größte Kreis

$$= \frac{11\ a^2}{14},\ \text{also}$$

$$b = \frac{11\ a^2}{14} \times 4 = \frac{22\ a^2}{7},\ \text{und}$$

$$c = \frac{22\ a^2}{7} \times \frac{a}{6} = \frac{11\ a^3}{21}.$$

Ist 2tens b gegeben; so wird

$$\frac{22\ a^2}{7} = b$$

a^2

$$a^2 = \frac{7b}{22}$$

$$a = \sqrt{\frac{7b}{22}},\ \text{und}$$

$$c = b \times \frac{1}{6}\sqrt{\frac{7b}{22}} = \frac{b}{6}\sqrt{\frac{7b}{22}}.$$

Und ist 3tens c gegeben; so wird

$$\frac{11a^3}{21} = c$$

$$a^3 = \frac{21c}{11}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{21c}{11}},\ \text{und}$$

$$\sqrt{\frac{7b}{22}} = \sqrt[3]{\frac{21c}{11}}$$

$$\frac{7b}{22} = \left(\sqrt[3]{\frac{21c}{11}}\right)^2$$

$$\frac{7b}{22} = \sqrt[3]{\frac{441cc}{121}}$$

$$b = \frac{22}{7}\sqrt[3]{\frac{441cc}{121}}.$$

110. Zieht man durch jede zween Punkte a und f der Oberfläche eines rechten Cylinders zwo auf die Achse senkrechten Ebenen, und in diesen die Halbmesser fc und ad; so sind diese Halbmesser gleich und senkrecht auf die Achse.

Fig. 378.

Daher sind alle Punkte der Oberfläche eines rechten Cylinders gleichweit von der Achse entfernt.

Fig. 378. 111. Zieht man durch jeden Punkt a der Oberfläche eines rechten Cylinders eine Gerade ab senkrecht auf die Grundfläche desselben; so ist diese Gerade mit der Achse gleichlaufend, folglich sind alle ihre Punkte ebensoweit als der Punkt a von der Achse entfernt.

Wenn also eine Gerade auf die Grundfläche eines rechten Cylinders senkrecht ist, und einen Punkt mit der Oberfläche gemein hat; so liegt diese Gerade ganz in der Oberfläche.

Fig. 378. 112. Ist eine Ebene abhg senkrecht auf die Grundfläche eines rechten Cylinders, und man zieht durch einen dieser Ebene und der Oberfläche gemeinen Punkt a auf die Grundfläche eine senkrechte gerade Linie; so liegt diese ganz in der Oberfläche, und zugleich in der Ebene abhg; also macht sie mit dem Durchschnitte dieser zwo Flächen nur eine und dieselbe Linie aus.

Daher ist der Durchschnitt einer auf die Grundfläche des rechten Cylinders senkrechten Ebene und der Oberfläche desselben allzeit eine auf die Grundfläche senkrechte gerade Linie.

Fig. 378. 113. Führt man durch die Achse cd eines rechten Cylinders eine Ebene abcd, und auf diese durch die Seite ab eine senkrechte Ebene xyzu; so sind alle senkrechten Geraden, welche man von den Punkten der Achse auf den Durchschnitt ab zieht, auch senkrecht auf die Ebene xyzu, dem Halbmesser ad gleich, und kleiner als jede andere Gerade dx: alle Punkte der Seite ab und nur die Punkte dieser Seite sind also der Ebene xyzu und der Oberfläche des Cylinders gemein.

Zieht man also durch eine Seite des rechten Cylinders auf die Ebene, welche durch diese Seite und die Achse geht, eine senkrechte Ebene; so berührt diese den Cylinder in ebenjener Seite.

Fig. 379. 114. Schneidet eine Ebene mnpq den rechten Cylinder durch die Achse cd in zween Theile, und man

dre-

drehet den einen Theil um die unbewegliche Achse c d, bis die Seite m n des einen mit der Seite q p des andern Theiles übereinkömmt; so fallen die Ebenen durch die Achse, die auf die Achse senkrechten Ebenen der Grundflächen, und die krummen Oberflächen beeder Theile zusammen; also decken sich diese Theile.

Jede Ebene durch die Achse schneidet also den rechten Cylinder in zween vollkommen gleiche Theile.

Ein solcher Theil des rechten Cylinders heiße **Halbcylinder**, der Schnitt durch die Achse seine **Grundfläche** und jeder auf diese Grundfläche senkrechte Halbmesser c b seine **Höhe**.

115. Schneidet die Ebene a b c d den Halbcylinder a b m n p q durch die Achse c d senkrecht auf die Grundfläche m n p q in zween Theile, und man drehet den einen Theil um die unbewegliche Achse c d, bis die Seite a b des einen mit der Seite p q des andern Theiles übereinkömmt; so fallen abermal die Ebenen durch die Achse, die auf die Achse senkrechten Ebenen, und die krummen Oberflächen beeder Theile zusammen; also decken sich diese Theile. Fig. 379.

Jede zwo aufeinander senkrechten Ebenen durch die Achse schneiden also den rechten Cylinder in vier vollkommen gleiche Theile.

Ein solcher Theil des rechten Cylinders heiße **Viertelcylinder**, der Schnitt m n c d durch die Achse seine **Grundfläche**, und jeder auf die Grundfläche senkrechte Halbmesser c b seine **Höhe**.

116. Schneidet man einen Viertelcylinder a c b f g h durch eine Ebene a c d, und sodann den **Abschnitt** a c b d durch eine auf die Höhe a c senkrechte Ebene o m n; so ist diese Ebene auch senkrecht auf die Ebene a c b, also ihr Durchschnitt m n mit der Oberfläche a b d nach Nro. 112. eine auf die Ebene a c b senkrechte gerade Linie; ferner sind o m und c b, o n und c d Durch- Fig. 380.

schnitte zwoer gleichlaufenden Ebenen omn und cbd, und einer dritten Ebene abc oder acd; folglich ist mn mit bd, om mit cb, und on mit cd gleichlaufend, also das Dreyeck omn dem Dreyecke cbd ähnlich.

Schneidet man also einen Abschnitt acbd des Viertelcylinders senkrecht auf seine Höhe ac; so ist der Schnitt omn allemal ein mit der Grundfläche cbd ähnliches Dreyeck.

Fig. 381. 117. Umschreibt man dem Abschnitte acbd eines Viertelcylinders ein rechtes dreyseitiges Prisma cbdefa, halbirt ein beliebiges Stück gk der Höhe ac in o, und zieht auf ac die senkrechten Ebenen ghi, omn, und klt, sodann durch mn die auf die Ebene cmn senkrechte Ebene xyzu, und noch die Gerade xv senkrecht auf kl; so ist xu der Durchschnitt der auf die Ebene cmn senkrechten Ebenen acb und xyzu, also xmc ein rechter Winkel: folglich haben die Dreyecke xvu und cmo alle drey Seiten senkrecht aufeinander; also verhält sich

$$xu : xv = cm : om, \text{ oder}$$

$$xu : hl = kl : om,$$

folglich auch wegen der ähnlichen Dreyecke klt und omn,

$$xu : hl = lt : mn; \text{ also ist}$$

$$xu \times mn = hl \times lt,$$

und daher das Trapez xyzu dem Rechtecke hitl gleich. Wird gk unendlich klein; so fällt das Trapez xyzu mit dem entsprechenden Theile pqrs der Oberfläche abd zusammen; also ist in diesem Falle auch die Fläche pqrs dem Rechtecke hitl gleich

Setzet man nun, es sey die Höhe ac in unendlich viele Theile getheilt, und durch jeden Theilungspunkt eine auf ac senkrechte Ebene gezogen; so wird jeder unendlich kleine Theil pqrs der Oberfläche abd, welcher zwischen jeden zwo aus jenen gleichlaufenden Ebenen begriffen ist, dem entspringenden Rechtecke hitl, welches zwischen den-

sel-

selben Ebenen liegt, gleich; folglich wird auch die Summe aller jener Theile der Oberfläche abd, oder die Oberfläche abd der Summe aller jener entsprechenden Rechtecke, oder dem Rechtecke bdef gleich. Es ist aber das Rechteck

$$bdef = bd \times bf = bd \times bc,$$

und das Dreyeck

$$cbd = \frac{bd \times bc}{2},$$

also ist die Oberfläche abd das Doppelte des Dreyeckes cbd.

Zieht man ferner durch jede zween Punkte m und p des Bogens ab, und den Mittelpunkt c zwo auf die Ebene abc senkrechte Ebenen cmn und cpq, sodann die Gerade co senkrecht auf mp; so ist co auch senkrecht auf die Ebene mnpq, also die Höhe der vierseitigen Pyramide cmnpq; und wird mp unendlich klein; so fällt die Ebene mnpq in die Oberfläche abd, und die Höhe co wird dem Halbmesser ca gleich. Fig. 382.

Stellt man sich nun vor, der Abschnitt abcd sey aus unendlich viel solchen Pyramiden zusammen gesetzet; so wird eine jede dem Produkte ihrer zugehörigen Grundfläche in ein Drittel des Halbmessers ca, also auch ihre Summe oder der Abschnitt acbd, dem Produkte der Summe aller jener Grundflächen, oder der Oberfläche abd in ein Drittel des Halbmessers ca gleich.

Daher ist die Oberfläche abd eines jeden Abschnittes acbd des Viertelcylinders allzeit dem Doppelten seiner Grundfläche cbd, und der körperliche Inhalt desselben dem Produkte seiner Grundfläche cbd in zwey Drittel seiner Höhe ac gleich.

118. Ist die Ebene acb senkrecht: und die Ebene acd und ace schief auf die Achse cg des Viertelcylinders; so ist nach Vorigem Fig. 383. 384.

1tens die Oberfläche abd = 2cbd,
und die Oberfläche abe = 2cbe,
also auch die Oberfläche ade = 2cde,
2tens der Körper acbd = cbd × $\frac{2}{3}$ac,
und der Körper acbe = cbe × $\frac{2}{3}$ac,
also auch der Körper aced = ced × $\frac{2}{3}$ac.

Daher ist die Oberfläche eines jeden Ausschnittes aced des Viertelcylinders dem Doppelten seiner Grundfläche ced, und der körperliche Inhalt desselben dem Produkte seiner Grundfläche ced in zwey Drittel seiner Höhe ac gleich.

Fig. 385. 119. Ist die Ebene abf senkrecht, und die Ebene adf schief auf die Achse cg des Halbcylinders ak, und die Ebene bcgl senkrecht auf den Durchmesser af; so besteht jeder **Abschnitt** afbd, oder **Ausschnitt** afde des Halbcylinders aus zweenen Abschnitten acbd und fcbd, oder aus zweenen Ausschnitten acde und fcde eines Viertelcylinders.

Folglich ist die Oberfläche dfba, oder efda eines jeden Ab- oder Ausschnittes des Halbcylinders dem Vierfachen des auf den Durchmesser af durch den Mittelpunkt c senkrecht geführten Schnittes bcd oder dce, und der körperliche Inhalt desselben dem Produkte aus ebendiesem Schnitte in zwey Drittel des Durchmessers af gleich.

Fig. 386. 120. Ist die Ebene acb senkrecht auf die Achse cg des Viertelcylinders, und bd = be; so sind die bey b rechtwinklichten Dreyecke cbd und cbe wegen ihrer gleichen Katheden vollkommen gleich: und zieht man die Ebene orn senkrecht auf ac; so werden die Dreyecke omn und omr den Dreyecken cbd und cbe ähnlich, also wegen der gemeinen Kathede om vollkommen gleich: folglich sind die auf ac senkrechten Geraden ce und cd, or und on gleich. Drehet man also den Abschnitt acbd um die unbewegliche Höhe ac, bis die Ebene acd mit der

Ebe-

Ebene ace zusammenfällt; so kömmt jeder Punkt n der Krummen and mit einem Punkte r der Krummen are überein; also decken sich die Schnitte acd und ace.

Nachdem der Winkel dce dieses Ausschnittes aced 120, 90, 72 oder 60 Grade hat; so geben 3, 4, 5 oder 6 solche Ausschnitte nach der Höhe ac zusammengestossen ein 3, 4, 5 oder 6eckigtes Kappegewölb, Fig. 392. und 393.

Die Oberfläche eines Kappegewölbes ist also dem Doppelten seiner Grundfläche, und der körperliche Inhalt ebendieses vollen Gewölbes dem Produkte seiner Grundfläche in zwey Drittel seiner Höhe ac gleich. Fig. 392. 393.

121. Ist die Ebene acb senkrecht auf die Achse des Viertelcylinders, bd = bf, und be = bg, und man drehet den Ausschnitt acfg um ac, bis die Ebene acf mit der ihr vollkommen gleichen acd zusammenfällt; so entsteht der Körper acgde, dessen Seitenflächen acg und ace abermal vollkommen gleich sind. Fig. 387. 388.

Nachdem der Winkel gce dieses Körpers acgde 120, 90, 72 oder 60 Grade hat; so geben 3, 4, 5 oder 6 solche Körper nach der Höhe ac zusammengestossen ein 3, 4, 5 oder 6eckigtes Sterngewölb Fig. 394. und 395.

Die Oberfläche eines Sterngewölbes ist also dem Doppelten seiner Grundfläche, und der körperliche Inhalt ebendieses vollen Gewölbes dem Produkte seiner Grundfläche in zwey Drittel seiner Höhe ac gleich. Fig. 394. 395.

122. Schneidet man einen Viertelcylinder acbdef durch die Diagonalebene acd; so wird die krumme Oberfläche adf des Körpers acdef der Oberfläche abdf des Viertelcylinders weniger der Oberfläche abd des Abschnittes, und der Körper acdef dem Viertelcylinder weniger dem Abschnitte gleich. Fig. 389.

Da-

Daher ist die krumme Oberfläche adf des Körpers acdef dem Produkte des Bogens df in die Seite af weniger dem Doppelten seiner Grundfläche ced, und der körperliche Inhalt ebendesselben dem Produkte des Viertelkreises def in die Seite af weniger dem Produkte seiner Grundfläche ced in zwey Drittel seiner Höhe ac gleich.

Fig. 390. 123. Zieht man durch die Achse ce des Halbcylinders die Ebene acef senkrecht auf die Grundfläche bdgh, sodann die Ebenen acd und acg; so besteht der **Ausschnitt** acdgf des Halbcylinders aus den Körpern acdef und acgef.

Daher ist die krumme Oberfläche adfg eines Ausschnittes acdgf des Halbcylinders dem Produkte des halben Umfanges dfg in die Seite af weniger dem Doppelten seiner Grundfläche gcd, und der körperliche Inhalt desselben dem Produkte des Halbkreises dgf in die Seite af weniger dem Produkte seiner Grundfläche gcd in zwey Drittel seiner Höhe ac gleich.

Fig. 390. 391. 124. Drehet man den Viertelcylinder achgef um die unbewegliche Höhe ac, bis die Ebene ach mit der Ebene acb zusammenfällt; so findet man wegen der gleichen Seiten bd und bg des Ausschnittes acgd nach Nro. 120. die Ebene acg = acd.

Nachdem der Winkel gdc dieses Ausschnittes acdgf des Halbcylinders 120, 90, 72 oder 60 Grade hat; so geben 3, 4, 5 oder 6 solche Ausschnitte nach der Höhe ac zusammengestoßen ein 3, 4, 5 oder 6eckigtes **Kreuzgewölb** Fig. 396. und 397.

Fig. 396. 397. Die krumme Oberfläche eines Kreuzgewölbes ist also dem Produkte aus der Summe aller halben Umfänge dfg in die Seite af weniger dem Doppelten seiner Grundfläche, und der körperliche

In-

Inhalt ebendieses vollen Gewölbes dem Produkte aus der Summe der Halbkreise dgf in die Seite af weniger dem Produkte seiner Grundfläche in zwey Drittel seiner Höhe gleich.

125. Schneidet man was immer für eine Pyramide oabcd durch eine mit der Grundfläche gleichlaufende Ebene efgh; so sind 1tens die Grundflächen efgh und abcd, und jede zwo Seitenflächen oef und odc der Pyramiden oefgh und oabcd ähnlich; 2tens ist jeder Winkel jeder zwo Flächen oef und efgh in der einen dem Winkel der zwo jenen ähnlichen Flächen odc und abcd in der andern Pyramide gleich; 3tens sind die Verhältnisse der gleichnamigen Seiten oe : od, und der gleichnamigen Linien oy : ox immer dieselben. Körper, welche diese Eigenschaften haben, werden **ähnliche Körper** genennt. Fig. 344.

Die Oberflächen jeder zween ähnlichen Körper sind also Summen von gleichviel ähnlichen Flächen, und verhalten sich daher wie die Quadrate jeder zwo gleichnamigen Seiten. Ihre körperlichen Inhalte aber sind Produkte aus ähnlichen Flächen in gleichnamige Linien; folglich ist das Verhältniß ähnlicher Körper aus drey gleichen Verhältnissen gleichnamiger Linien zusammengesetzt; also dem kubischen Verhältnisse jeder zwo gleichnamigen Linien gleich.

126. Soll ein Körper in einen andern verwandelt werden; so benennet man die unbekannte Ausmessung des gesuchten Körpers durch x, berechnet die Inhalte beeder Körper, setzt sie vermög der gegebenen Bedingung in eine Gleichung, und löset diese nach der Rechenkunst auf, oder führet sie nach Nro. 20. 2c. aus, nachdem die bekannten Ausmessungen in Zahlen oder Linien gegeben sind.

Von dem Nivelliren.

127.

Weil alle Körper vermög ihrer Schwere in geraden Linien gegen den Mittelpunkt der Erdkugel fallen; so ist ein Punkt ebensohoch, höher oder tiefer als ein anderer, nachdem jener ebensoweit, mehr oder weniger als dieser von dem Mittelpunkte der Erde absteht.

128. Wenn alle Punkte einer Linie, oder einer Fläche gleichhoch sind; so heißt jene eine **wahre Horizontallinie**, und diese eine wahre **Horizontalfläche.** Deswegen wird die Horizontallinie oder Horizontalfläche, wovon oben die Rede war, nur eine **scheinbare** Horizontallinie oder Horizontalfläche genennt.

Fig. 398. Der Durchschnitt a d einer Vertikalebene c a b, und der Oberfläche der Erdkugel des Halbmessers c a ist also eine wahre Horizontallinie, und wird von der scheinbaren a b in dem Punkte a berührt.

Fig. 399. Die wahre Horizontalfläche k l g, welche durch einen Punkt a geht, ist allemal ein Theil der Oberfläche der Erdkugel des Halbmessers c a. Sie wird ebenfalls von der scheinbaren Horizontalfläche d e b in dem Punkte a berührt.

Fig. 399. 129. Ist a der Berührungspunkt einer scheinbaren Horizontalfläche b e d, und die Bögen a g, a l, a k sind gleich; so haben die bey a rechtwinklichten Dreyecke c a b, c a e und c a d die Winkel bey c gleich, und die Kathede c a gemein; also sind auch die Hypothenusen c b, c e und c d gleich; folglich liegen die Punkte b, e und d in der wahren Horizontalfläche von dem Halbmesser c b, welche um b g höher als die wahre Horizontalfläche von dem Halbmesser c a liegt.

Ist der Bogen a h kleiner als a l, und man nimmt $ag = al$; so ist auch a h kleiner als a g, folglich c f kleiner als c b oder c e, und größer als c a.

Der

Der Berührungspunkt a einer scheinbaren Horizontalfläche b e d ist also der tiefeste aus allen Punkten ebendieser Fläche; die andern liegen immer höher, je mehr sie sich von jenem entfernen, und alle, welche von ebenjenem gleichweit abstehen, sind gleichhoch.

130. Setzet man wieder die Bögen a g, a l und a k gleich, und die Winkel c a b, c a e und c a d schief aber auch gleich; so haben die Dreyecke c a b, c a e und c a d die Seite a c gemein, und die zween anliegenden Winkel wechselweise gleich; folglich liegen die Punkte b, e und d abermal gleichhoch, oder in dem wahren Horizonte von dem Halbmesser c b. Fig. 399.

131. Den Unterscheid der Höhen mehrerer gegebenen Punkte einer Linie oder einer Gegend bestimmen, heißt **Nivelliren.**

Nimmt man eine wahre Horizontalfläche x y in beliebiger Höhe a x über einem aus dem gegebenen Punkten a an, und bestimmet sodann die Tiefen b f, c g, d h und e k aller übrigen Punkte b, c, d und e unter ebenjener wahren Horizontalfläche x y, welche der **Vergleichungsplan** heißt; so sind auch die Unterscheide der Höhen aller jener Punkte bestimmt. Denn zieht man die Tiefe e k eines jeden Punktes e von der Tiefe b f eines jeden andern b ab; so erhält man b l die Höhe des Punktes e über dem Punkte b. Fig. 400.

Erste Methode zu Nivelliren.

132. Ist was immer für ein Instrument o so beschaffen, daß man dadurch eine Gesichtslinie o . 1, o . 2, o . 3, o . 4 ꝛc. erhält, welche mit der Vertikallinie o s immer denselben Winkel s o . 1, s o . 2, s o . 3, s o . 4 ꝛc. macht, und man nimmt m b = m a, n c = n b, p d = p c und q e = q d, richtet das Instrument über m nach der in a senkrecht aufgehaltenen, in Schuh, Zoll und Linien eingetheilten Stange a x, und merkt den Punkt 1, wo die Gesichtslinie die Stange trift; so giebt a . 1 von der angenommenen Höhe a x abgezogen Fig. 401.

x 1 die Tiefe der Gesichtslinie unter dem Vergleichungsplane x y für die Entfernung m a.

Drehet man also die Gesichtslinie nach der Stange b f und merkt den Punkt 2, wo sie die Stange begegnet, so sind, weil m a gleich m b ist, nach Nro. 130. die Punkte 2 und 1 gleichhoch, folglich 2.f und 1.x gleich: also giebt b.2 zu 1.x addirt b f die Tiefe des Punktes b unter ebenjenem Vergleichungsplane x y.

Stellt man sodann das Instrument nacheinander über n, p und q; so erhält man 1tens die Tiefe c g, wenn man b.3 von b f abzieht, und zum Reste 3.f wieder c.4 addirt, 2tens die Tiefe d h, wenn man c.5 von c g abzieht, und zum Reste 5.g wieder d.6 addirt, und 3tens die Tiefe e k, wenn man d.7 von d h abzieht, und zum Reste 7.h wieder e.8 addirt.

Nachdem man einmal die Tiefe 1.x der Gesichtslinie unter dem Vergleichungsplane gefunden hat; so erhält man die Tiefen von soviel Punkten als man will, die ringsum das Instrument ebensoweit als a von m abstehen, wenn man bey jedem ebenso, wie bey b verfährt, und zu der Tiefe 1.x der Gesichtslinie unter dem Vergleichungsplane noch die Tiefe eines jeden Punktes unter der Gesichtslinie addirt. Ebendieses gilt auch von den Punkten, welche in gleichen Entfernungen um n, p und q herumliegen.

Von den Nivellirinstrumenten überhaupt.

Fig. 402. 133. Alle Punkte der Oberfläche eines in Ruhe stehenden Wassers liegen in einer und derselben wahren Horizontalfläche. Ebendieses gilt auch von den Oberflächen des Wassers, welches die blechene Röhre a b anfüllet, und in den eingekütteten gläsernen Cylindern a c und b d bis in m und n steiget. Lötet man daher mitten unten an die Röhre eine blechene Hülse e f, daß sie auf den Zapfen g h des Gestelles Q passet, und die Röhre in einer beynahe horizontalen Lage ringsum gedrehet werden kann; so

so hat man das einfachste aus allen Nivellirinstrumenten, die **Wasserwage.** Denn hält man das Aug u in der Höhe der Oberflächen m und n, und sieht nach der Stange p q; so ist die Gesichtslinie u m n y allemal senkrecht auf die Vertikallinie o s, welche die Gerade m n in o halbirt.

Die Tafel y der Nivellirstange p q ist nach dem horizontalen Striche z x in eine weisse und schwarze Hälfte getheilt, läßt sich durch eine Schnur, welche mit einem Ende in r befestiget ist, über die Rolle q und unter der Rolle p durchläuft, und mit dem andern Ende wieder in t angeheftet ist, auf- und abziehen, und in jeder Stelle durch eine rückwärts angebrachte Schraube v an die Stange befestigen. Für große Entfernungen wird mitten auf einer weissen Tafel ein schwarzer Kreis, wie das Schwarze einer Schießscheibe gezeichnet.

Der geringste Wind beweget das Wasser in den gläsernen Cylindern auf und ab, und beschweret das richtige Vorgehen mit diesem Instrumente ungemein. Ungeachtet bleibt es für kleine Entfernungen, wenn nicht eine besondere Schärfe erfodert wird, immer noch sehr brauchbar. Für große Entfernungen, da dieses Instrument, mit dem man kaum auf 25 Klafter scharf sieht, sehr oft vorgerücket werden muß, läßt sich wenig Genauigkeit versprechen.

134. Jeder Körper hat einen **Schwerpunkt,** einen Punkt, von dem man in allen Fällen setzen kann, daß die Schwere des ganzen Körpers in diesem Punkte allein versammelt ist.

Hänget man einen Körper a b an einem Punkte c auf; so ruht er nicht, bis der Punkt c, sein Schwerpunkt o und der Mittelpunkt s der Erde in einer und derselben geraden Linie liegen. Und wird ein Körper a b an zween Punkten c und d aufgehänget; so ruht er abermal nicht, bis sein Schwerpunkt o in der Vertikalebene d s c liegt. Fig. 403. Fig. 404.

Befestiget man ein Lineal g h, dessen Absehen h b mit einen Fadenkreuze b, und das Absehen g a mit einem horizontalen Einschnitte durch die Oeffnung a versehen ist, auf Fig. 405.

ei-

einen ziemlich schweren Körper Q, so daß jenes und dieser nur ein Ganzes ausmachen: so giebt dieses Ganze vermittelst zweener abgerundeten stählnen Zapfen c und d, welche auf zwo stählnen Walzen m n, m n übers Kreuz ruhen, aufgehängt, eine Gesichtslinie a b, welche mit der Vertikallinie o s, so oft der Körper ruht, immer einen und denselben Winkel macht.

Fig. 406. Zum Gestelle dieses Instruments kann ein aufrechtstehender hohler Cylinder dienen. Die Walzen m n, m n sind in den Seiten der Vertiefung a b c d etwas versenket, der Cylinder öffnet sich um die Gelenke h, h, h, und schließet sich wieder durch die Hacken g, g, g.

Es versteht sich, daß das Instrument in dem geschlossenen Cylinder aufgehängt, einen hinlänglichen Spielraum haben muß. Es wird auf einen Fuß P gestellt, und vermittelst der Handhaben x und y nach jeder aufgehaltenen Stange gedreht.

Dieses Instrument wird von dem Winde vielweniger als die Wasserwage beunruhiget; auch sieht man durch die Absehen viel weiter und schärfer als nach den Oberflächen des Wassers. Uibrigens kann es auch von einem Tischler und einem Schlosser verfertiget werden.

Fig. 407. 135. Schliesset man ein Senkbley a e in einem Gehäuße A E so ein, daß man dasselbe durch die mit Glas oder Krystall gedeckte Oeffnung bey E sehen kann, macht auf einer horizontalen messingenen Platte ein Zeichen e, woran der feine Faden des Senkbleys schlägt, und verbindet dieses Gehäuße so mit einem Lineal, daß beyde nur einen Körper ausmachen; so giebt dieses Instrument eine Gesichtslinie c d, welche mit der Vertikallinie a e, so oft der Faden des Senkbleys auf dem Zeichen e ruht, allemal denselben Winkel macht.

Dieses Instrument wird durch eine messingene Hülse m n auf das Gestell der Wasserwage gesetzet, nach jeder Stange gerichtet, und durch die Schraube b befestiget; sodann durch die Schraube ohne End q, welche in den Bogen r s eingreift, um das Gewind u solange erhöht

oder

oder gesenket, bis der Faden des Senkbleys auf das Zeichen e schlägt.

Je feiner und länger der Faden oder das Haar ae des Senkbleys ist, um soviel eher werden die Abweichungen desselben von dem Zeichen e kennbar, und um soviel zuverläßiger ist das Instrument.

136. Schleifet man eine gläserne Röhre ab durch einen kupfernen Cylinder von einem etwas kleinern Durchmesser solange aus, bis die innere Fläche der Röhre vollkommen gerade wird, schmelzt sie sodann vermittelst einer Lampe an einem Ende zusammen, füllet sie mit feinstem Weingeiste bis auf eine Luftblase, und schmelzt sie auch am andern Ende zu; so schwimmt die Luftblase cd über dem Weingeiste in der Mitte der Röhre, so oft die obere Seite der innern Fläche in dem scheinbaren Horizonte liegt, und zieht sich gegen der höhern Seite, so wenig man nur die Röhre an einem Ende erhöht. Fig. 408.

Fasset man also diese gläserne Röhre in einen auf der obern Seite ausgeschnittenen messingenen Cylinder, bezeichnet die Ende der Luftblase, da sie in der Mitte steht, durch messingene Bögen c, d, und befestiget endlich diesen Cylinder vermittelst der Schrauben n, n auf ein Lineal; so giebt dieses Instrument eine Gesichtslinie cd, welche mit der Vertikallinie os, so oft die Blase ihre angewiesene Stelle einnimmt, allemal denselben Winkel macht. Fig. 409.

Dieses Instrument wird vermittelst der Hülse ab auf das nämliche Gestell als das vorige gesetzet, nach jeder Stange gedrehet, und durch die Schraube q befestiget, sodann durch die Schraube e, welche durch die messingene Stange ae geht, um das Gewind u solange erhöht oder gesenket, bis die Luftblase in ihre angewiesene Stelle kömmt.

Verstopfet man anfänglich den gläsernen Cylinder beederseits nur mit Wachs, und befestiget ihn auf eine drey oder mehr Klafter lange Meßstange, die man an beyden Enden vermittelst einer vertikalen Schraube erhöhen oder senken kann; so erfährt man, daß derselbe nach der obern Fig. 408.

Sei-

Seite gerade ausgeschliffen ist, wenn sich die Blase bey geringen und gleichen Erhöhungen eines Endes der Meßstange jedesmal gleichförmig bewegt.

Fig. 409. Auf eine ähnliche Art kann man eine an dem Instrumente schon befestigte Blase vermittelst der Schraube e auf die Probe stellen. Je länger übrigens die Luftblase, und je größer der Durchmesser der gläsernen Röhre ist, desto empfindsamer und besser wird dieselbe.

Weil die Wärme den Weingeist ausdehnet, also die Luftblase bey warmer und kalter Witterung eine verschiedene Länge erhält; so bringt man an jedem Ende der Luftblase zwey oder drey Zeichen an, damit man auch bey abgeänderter Länge derselben noch von der Lage in der Mitte der Röhre urtheilen kann.

Fig. 402. 405. 407. 409. 137. Die Oberfläche eines in Ruhe stehenden Wassers, die eigene Schwere eines aufgehängten Instruments, das Senkbley und die Luftblase, bestimmen also vier Arten Nivellirinstrumente. Von jeder Art hat man ein Beyspiel gesehen.

Das Instrument der zwoten Art hat den Vortheil vor jenem der dritten oder vierten Art, daß jenes sobald es aufgehängt ist, die Gesichtslinie von selbsten und ohne menschliches Zuthun richtig in ihre vorige Lage bringt; da es hingegen bey den zwey letztern von der Schärfe und dem Urtheile des Auges abhängt, daß das Senkbley wieder ebenso gut als zuvor auf das angewiesene Zeichen schlage, oder die Luftblase wieder vollkommen ihre vorige Stelle einnehme.

Hingegen ist es wieder schwer ein Instrument der zwoten Art so aufzuhängen, daß es nicht bald die Punkte, worauf es ruht, zusammen drücke, und daher um sich zu bewegen ein Uibergewicht fodre, und schwer dasselbe gegen den Wind ganz sicher zu stellen, ohne daß es nicht wegen seiner Unbequemlichkeit ganz unbrauchbar werde.

Die gläserne Röhren können so gerade ausgeschliffen werden, daß die Blase für einen Winkel von 3 bis 4

Sekunden einen Ausschlag giebt, welche Genauigkeit man sich von einem Senkbley, wenn es auch an einem vier Schuh langen feinsten Haare hängt, nie versprechen kann.

Ein Instrument der vierten Art ist also um somehr einem der dritten vorzuziehen, als jenes viel besser gegen den Wind gesichert, und viel bequemer als dieses ist.

Uibrigens läßt sich ein jedes aus diesen Instrumenten noch in vielen Stücken zu verschiedenen Absichten abändern. So kann anstatt des Lineals mit Absehen ein hohles aus hartem Holze verfertigtes Parallelepiped AB, welches gegen dem Gegenstande ein Fadenkreuz und gegen dem Auge eine kleine Oeffnung hat, angewendet werden. Fig. 410.

Von der Zurückwerfung der Lichtstrahlen.

138. Man sieht jeden Gegenstand nur durch Lichtstrahlen, welche von demselben dem Auge zugeschicket werden. Darum sieht auch das beste Aug im Finstern nichts.

Ein leuchtender Körper schicket seine Lichtstrahlen nach allen Seiten wie die Halbmesser einer Kugel aus ihrem Mittelpunkte fort. Darum wird eine leuchtende Fackel bey finsterer Nacht in einer ganzen Gegend gesehen.

139. Ein Lichtstrahl ab, welcher unter einem spitzen Winkel abm auf eine undurchsichtige Ebene pq fällt, wird nach der Geraden bc unter einem Winkel cbn = abm so zurückgeworfen, daß der **auffallende** Strahl ab, und der **zurückgeworfene** bc in einer auf die Ebene pq senkrechten Ebene amnc liegen. Fig. 411.

Fährt z. B. ein Lichtstrahl ab durch die Oeffnung d in ein verfinstertes Zimmer, und wird durch einen horizontalen Spiegel b nach bc zurückgeworfen; so schneiden alle Senkrechten de, gf, welche man durch das Senkbley auf die Ebene des Spiegels fällt, ebendiese Ebene in einer geraden Linie ebf; ferner sind jede zwo de und gf, welche von b gleichweit abstehen, gleich.

140. Weil jeder Punkt, das ist, jedes kleinste Theilchen eines undurchsichtigen Körpers von einer unzähligen

Men-

Menge unempfindlicher Ebenen allerley Lagen umgeben ist; so werden die Lichtstrahlen, welche aus einem leuchtenden Körper z. B. der Sonne auf dasselbe fallen, wieder wie aus dem Mittelpunkte einer Kugel nach allen Seiten zurückgeworfen. Darum wird bey Tage eine Thurmspitze aus jedem Orte der ganzen umliegenden Gegend gesehen.

Von der Strahlenbrechung.

Fig. 412. 141. Wenn ein Lichtstrahl a b aus einem dünnern in einen dichtern durchsichtigen Körper (**aus einem dünnern in ein dichters Mittel**) z. B. aus der Luft in das Glas x y z u fährt; so wird derselbe in b näher gegen der auf die Oberfläche x y des Glases senkrechten Geraden b d dergestalt gebrochen, daß die Verlängerung b f des **einfallenden** Strahles a b, der **gebrochene** Strahl b c, und die Senkrechte b d in einer und derselben Ebene liegen; d b f wird der **Neigungswinkel**, d b c der **gebrochene Winkel**, und c b f der **Brechungswinkel** genennt.

Fig. 413. Ist z. B. x b d u ein undurchsichtiger Körper, d f die Länge seines Schattens, und man stößt ein mit Wasser gefülltes Glas b y z d nach der Höhe b d an; so wird der Schatten d c in dem Wasser kleiner als der Schatten d f in der Luft.

Fig. 412. 142. Fährt ein Lichtstrahl b c aus einem dichtern Mittel in ein dünners, z. B. aus dem Glase x y z u in die Luft; so wird derselbe in c nach c o weiter von der auf die Oberfläche u z senkrechten Geraden c m gebrochen.

Fig. 414. Hält man z. B. das Aug a so, daß man nur noch das Ende d des Bodens b d eines leeren Gefäßes sieht, und füllet sodann dasselbe mit Wasser; so wird man ohne das Aug zu erhöhen einen grossen Theil c d des Bodens entdecken.

Fig. 412. 143. Kömmt der Strahl c b von c her, so wird er denselben Weg nach a zurückkehren; der gebrochene Winkel e b a des ausfahrenden Strahls c b ist also dem

Nei-

Neigungswinkel dbf des einfallenden Strahles ab gleich. Ist ferner xy mit uz gleichlaufend, und der Lichtstrahl fährt von a nach o; so ist der Winkel mco = eba; also auch mco = dbf : db, und mc aber sind gleichlaufend; also sind es auch co und bf oder co und ab.

So oft also die Oberflächen xy und uz eines Glases gleichlaufen: so wird der Lichtstrahl abco in b und c so gebrochen, daß der **ausfahrende** Theil co mit dem einfallenden ab wieder gleichläuft; folglich kann dieser Strahl abco, im Falle die Dicke bd des Glases sehr klein ist, als eine gerade Linie betrachtet werden.

144. Der auf die Oberfläche xy senkrechte Strahl ebd wird nie gebrochen, jeder andere abc bricht sich um so mehr, je größer sein Neigungswinkel dbf ist, und alle, welche unter gleichen Neigungswinkeln einfallen, werden gleich gebrochen. Fig. 412.

Eben dieses gilt auch für die ausfahrenden Strahlen bdr und bco.

145. Die Richtung einer krummen Linie xy, und jene einer Tangente mn ist in dem Berührungspunkte m dieselbe: und ebenso ist die Lage einer krummen Fläche mit jener einer berührenden Ebene in dem Berührungspunkte einerley. Nachdem also eine Gerade am, bm senkrecht oder schief auf eine Ebene mn ist; so steht diese Gerade am, bm auch senkrecht oder schief auf jede krumme Fläche xy, welche jene Ebene in m berührt. Fig. 415.

Daher wird ein Lichtstrahl ab, welcher aus der Luft in eine gläserne Kugel, oder aus dieser in die Luft fährt, nicht gebrochen, wenn seine Richtung durch der Kugel Mittelpunkt c geht, jeder andere fgh bricht sich in g, Fig. 416. um so näher gegen dem Halbmesser cg, oder Fig. 417. um so weiter von der Verlängerung gl des Halbmessers cg, je größer sein Neigungswinkel cgk oder lgk ist, und alle, welche unter gleichen Neigungswinkeln ein- oder ausfahren, werden gleich gebrochen. Fig. 416. 417.

Von der beederseits erhabenen Linse.

Fig. 418. 146. Sind m und n die Mittelpunkte der Bögen acb und adb; so stellt die Figur acbda den Durchschnitt eines kugelförmig geschliffenen Glases vor, dessen **Achse** mn ist.

Drehet sich die Figur cad um die Achse, so beschreibt sie das Glas. Es wird eine **beederseits erhabene Linse** genennt.

Fig. 419. 420. Sind die Lichtstrahlen ab, ac gleichlaufend, oder kommen von einem Punkte a der Achse mn her; so ist Fig. 419. der Neigungswinkel $x = y$, Fig. 420. der Winkel $x > y$, und in beeden Figuren $y > u$, folglich auch $x > u$.

Je mehr sich also ein Lichtstrahl ab oder ac von der Achse entfernt, desto größer wird der Neigungswinkel, unter welchem derselbe in die Linse fährt.

Fig. 421. 147. Ein Lichtstrahl ab, welcher mit der Achse mn gleichlaufend in die Linse fällt, bricht sich in b näher gegen den Halbmesser nb, und in c weiter von der Verlängerung des Halbmessers mc, also jedesmal gegen die Achse mn, die er sodann in einem Punkte f begegnet.

Fig. 422. 423. Daher geschieht es, daß alle mit der Achse gleichlaufenden Lichtstrahlen, welche unter sehr kleinen Neigungswinkeln, also sehr nahe bey der Achse einfallen, sich auf der entgegengesetzten Seite des Glases für unsere Empfindung so gut, als in einem und demselben Punkte f oder g vereinigen.

Weil die Lichtstrahlen, welche aus der Sonne herkommen wegen der großen Entfernung so gut als gleichlaufend sind; so wird eine solche gegen die Sonne gewendete Linse in eben jenem Punkte f oder g brennen. Daher wird der Punkt f oder g des Glases **Brennpunkt**, und die Entfernung desselben fo oder go von dem Glase, desselben **Brennweite** genennt.

Ist

Ist f oder g ein leichtender Punkt; so werden die Strahlen, welche von diesem Punkte aus sehr nahe bey der Achse einfallen, wieder denselben Weg zurückkehren, also nach doppelter Brechung mit der Achse gleichlaufend fortfahren.

148. Ist a o größer als g o; so bricht sich der Lichtstrahl a b in b näher gegen den Halbmesser n b, und in c weiter von der Verlängerung des Halbmessers m c, folglich jedesmal gegen der Achse m n, und schneidet sodann die Achse in einem Punkte d, welcher allemal weiter als der Brennpunkt f von dem Glase entfernet ist. Fig. 424.

Alle Lichtstrahlen, welche von einem Punkte a der Achse herkommen, und unter sehr kleinen Neigungswinkeln, also sehr nahe bey der Achse einfallen, versammeln sich folglich wieder hinter dem Glase für unsere Empfindung so gut, als in einem und demselben Punkte d der Achse. Fig. 425.

Entfernt sich der Leuchtende Punkt a von dem Glase; so nähert sich der **Sammlungspunkt** d dem Brennpunkte f, und kömmt Fig. 422. mit f überein, sobald a unendlich weit von dem Glase absteht. Nähert sich aber a dem Brennpunkte g; so entfernt sich d von dem Brennpunkte f, und zwar bis in das Unendliche, sobald Fig. 423. a mit g übereinkömmt.

Nähert sich der leuchtende Punkt a dem Glase ferner, so daß er zwischen den Brennpunkt g und das Glas fällt; so zerstreuen sich die gebrochenen Strahlen dergestalt, daß ihre Verlängerungen sich in einem Punkte e der Achse auf der entgegengesetzten Seite des Glases, vereinigen. Dieser **Zerstreuungspunkt** e nähert sich sodann dem Brennpunkte g, so oft sich a dem Glase nähert. Fig. 426.

149. Unter allen Lichtstrahlen, welche von einem leuchtenden Punkte b auf das Glas fallen können, giebt es allemal einen b m n e, welcher sich in den Berührungspunkten m und n zwoer gleichlaufenden Ebenen p q und r s bricht. Der gebrochene Theil n e ist also in diesem Falle mit dem einfallenden Theile b m gleichlaufend; folg- Fig. 427.

lich kann der ganze Strahl bmne wegen der kleinen Dicke des Glases als eine gerade Linie angesehen werden.

Fig. 428. Ist der Winkel boa sehr klein; so vereinigen sich alle Strahlen, welche von b aus unter sehr kleinen Neigungswinkeln, also sehr nahe bey der Achse einfallen hinter dem Glase für unsere Empfindung so gut, als in einem und demselben Punkte e ebenjener geraden Linie bmne.

Ebenso werden die Lichtstrahlen, welche von jedem Punkte der Geraden ab herkommen, allemal in einem Punkte der Geraden de versammelt.

Jede Gerade be wird die **Achse des doppelten Strahlenkegels**, welcher durch die von b nach e fahrenden Strahlen entsteht, genennt: und der Durchschnitt o der Achse ad des Glases und der Achsen aller Strahlenkegel heißt der **Mittelpunkt der Strahlenbrechung.**

Ist ab senkrecht auf die Achse; so ist es auch de. Jeder Sammlungspunkt e der Strahlen, welche von b herkommen, ist also ebensoweit, als der Sammlungspunkt d der Strahlen, welche von a herkommen, von dem Glase entfernt.

Fig. 429. 430. Kömmt daher a mit dem Brennpunkte g überein, so ist e unendlich weit von dem Glase entfernt; also fahren alle Strahlen, welche aus b her einfallen, nach der Brechung gleichlaufend mit bo fort. Und liegt a zwischen dem Brennpunkt g und dem Glase; so zerstreuen sich die gebrochenen Strahlen, welche von b herkommen um so mehr, jemehr sich a dem Glase nähert.

Fig. 431. 150. Läßt man nur durch eine beederseits erhabene Linse Licht in ein verfinstertes Zimmer fahren, und fängt es in b, wo die von einem Punkte A eines äußern stark beleuchten Gegenstandes ABC herkommenden Lichtstrahlen sich vereinigen, durch ein weißes Papier auf; so fällt alles Licht und nur das Licht, welches von jedem Punkte A herkömmt, auf dem Papiere in seinem Versammlungspunkte a zusammen. Daher wird jeder Punkt des äußern Gegenstandes, und der Gegenstand selbst auf dem Papiere deutlich und verkehrt gemahlt. Hält man aber das Papier in m

nä-

näher bey dem Glase, oder in n weiter von demselben auf; so füllen die Strahlen, welche von jedem Punkte A herkommen, auf dem Papiere einen ganzen Kreis aus: das Licht mehrerer nahe beysammen liegender Punkte des Gegenstandes vermischet sich also auf dem Papiere, und glebt nur ein dunkles oder auch, wenn das Papier weit von b aufgehalten wird, gar kein Bild.

Weil sich der Versammlungspunkt b dem Glase nähert, wenn sich der erleuchtete B von demselben entfernet; so muß das Papier für einen entferntern Gegenstand näher zu dem Glase, und für einen nähern Gegenstand weiter von demselben gerücket werden.

151. Sind die Achsen PQ und pq, die Halbmesser QB und qb, und die einfallenden Strahlen AB und ab gleichlaufend; so sind die Neigungswinkel GBQ und gbq gleich, also auch die gebrochenen Strahlen BF und bf gleichlaufend. Fig. 432. 433.

Ist nun f der Brennpunkt des Glases d, so ist F auch der Brennpunkt des Glases D: und wenn alle Lichtstrahlen, welche zwischen b und b in das Glas d einfallen, sich hinter demselben nach obigen Gesetzen versammeln; so vereinigen sich ebenso die Strahlen, welche zwischen B und B in das Glas D fahren. In diesem Falle wird bb die **Oeffnung** des Glases d und BB jene des Glases D genennt. Ein flächeres Glas D hat also allemal eine größere Brennweite, und eine größere Oeffnung als ein erhabeners d.

Nur die Oeffnung rr muß hell gelassen werden, das Uibrige des Glases wird verfinstert, sonst fallen die Strahlen Bu, welche von einem Punkte B herkommen, und außer rr in u gebrochen werden, auf die Bilder, welche neben b liegen, und verwirren dieselben um so mehr, als das Licht dieser Strahlen Bu, durch die Brechung aufgelöset wird, und einen ganzen Winkel ausfüllet. Fig. 434.

Je größer die Brennweite eines Glases ist, desto weiter entfernet sich das Bild abc eines Gegenstandes CBA von dem Glase, und desto größer wird dasselbe. Und je grö-

größer die Oeffnung eines Glases ist, desto mehr Strahlen fahren durch dieselbe von jedem Punkte B des Gegenstandes nach seinem Versammlungspunkte b. Ein flächeres Glas giebt also nicht nur ein größeres, sondern auch ein helleres Bild als ein erhabeneres.

Von dem Auge.

152. Hinter dem Stern im Auge befindet sich eine krystalartige Feuchtigkeit, welche in einem Häutchen eingeschlossen, und einer beederseits erhabenen Linse ähnlich ist. Die Lichtstrahlen, welche von jedem Punkte eines Gegenstandes herkommen, und durch den Stern einfallen, brechen sich in jener Linse dergestalt, daß sie sich im Hintertheile des Auges wieder in einem und demselben Punkte vereinigen. So empfindet die Seele die niedrigsten Punkte eines Gegenstandes in dem höhern, und die höchsten Punkte desselben in dem niedrigern Theile des Auges deutlich.

Nachdem übrigens ein gutes Aug auf einen entfernten oder nahen Gegenstand gerichtet ist, ändert sich die Figur oder die Lage der Linse so, daß die Sammlungspuukte allemal auf den Hintertheil des Auges, wo die Empfindung der Seele geschieht, treffen.

Von dem Fernrohre.

Fig. 435. 153. Setzet man in ein messingenes Rohr eine Linse R mit einer langen Brennweite R b, und eine andere o mit einer kurzen Brennweite o b so zusammen, daß ihre Entfernung R o der Summe ihrer Brennweiten R b und b o gleich wird; so werden die Lichtstrahlen, welche von jedem Punkte A, B, C eines sehr weit entlegenen Gegenstandes herkommen, sich hinter dem Glase R in den Punkten a, b, c vereinigen, in ebendiesen Punkten schneiden, und dann so in der Linse o brechen, daß sie mit den ihren Strahlenkegeln zugehörigen Achsen a o, b o, c o gleichlaufend

fend ausfahren, also ebenso in das Aug s fallen, als wenn sie von den Punkten eines sehr weit entlegenen Gegenstandes in das freye Aug kämen.

Ist nun die Linse des Auges S so beschaffen, daß sie Strahlen, welche von sehr entfernten Punkten herkommen, also gleichlaufend einfallen, in dem Hintertheile des Auges versammeln kann; so wird das Aug S den Gegenstand A B C deutlich, aber verkehrt sehen.

Die Linse R heißt **Vorderglas**, die Linse o **Augenglas**, und das ganze Instrument ein **Fernrohr**.

Das Augenglas wird in ein besonders kurzes Rohr, welchis in das lange paßt, gefasset; damit es nach Erforderniß weiter hineingeschoben oder herausgezogen werden kann.

Nähert sich der Gegenstand A B C dem Vorderglase R; so nähert sich dessen Bild a b c dem Augenglase so, daß das Bild zwischen das Augenglas und den beyden Gläsern gemeinen Brennpunkt f fällt. In diesem Falle werden die Lichtstrahlen, welche von a, b und c aus in das Augenglas fahren, von diesem dergestalt gebrochen, daß sie sich nach der Brechung, anstatt wie zuvor gleichlaufend fortzugehen, itzt zerstreuen. Solange nun diese Zerstreuung nicht größer ist, als jene der Strahlen, welche von jedem Punkte eines sehr nahen Gegenstandes in das freye Aug fahren; so sieht das Aug S den Gegenstand A B C noch deutlich. Kömmt aber das Bild a b c dem Augenglase so nahe, daß jene Zerstreuung der Strahlen noch größer wird; so sieht das Aug S den Gegenstand A B C nur dunkel und immer dunkler, jemehr sich das Bild dem Augenglase nähert. Fig. 436.

Daher kömmt es, daß man für nahe Gegenstände die Gläser weiter, als für entlegene voneinander entfernen muß, und daß der kurzsichtige, dessen Augenlinse nur zerstreute Strahlen im Hintertheile des Auges vereinigen kann, das Augenglas immer weiter hineinzuschieben hat, als der Weitsichtige, dessen Linse auch gleichlaufende Strahlen in dem Hintertheile des Auges zu versammeln gewöhnt ist.

Alle

Fig. 435. 436. Alle Lichtstrahlen, welche von jedem Punkte des Gegenstandes durch die Oeffnung des Vorderglases auf das Bild fallen, werden durch das Augenglas nach dem Stern des Auges S geschicket. Der Gegenstand scheint also durch das Fernrohr dem Auge S um so vielmal heller als dem freyen Auge, um wie vielmal die Oeffnung des Vorderglases größer als der Augenstern ist.

Die scheinbare Größe eines gesehenen Gegenstandes hängt von dem **Sehewinkel** ab, von dem Winkel, welchen die äußersten Strahlen eines Gegnnstandes in der Augenlinse machen. Der Gegenstand ABC erscheint dem Auge S unter dem Sehewinkel dSe, und dem freyen Auge unter dem Sehewinkel ARC oder aRc., also durch das Fernrohr um so größer, je größer der Winkel dSe in Ansehung des Winkels aRc wird.

Fig. 437. 154. Spannt man ein Paar von so feinen Seidenfäden, als sie vom Seidenwurme selbst gesponnen sind, in einem Gehäuse A nach rechten Winkeln aus, und befestiget dieses so in dem Fernrohre, daß das Fadenkreuz d in der Brennweite des Vorderglases senkrecht auf die Achse des Rohres steht; so wird das Bild eines sehr entfernten Gegenstandes in die Ebene des Fadenkreuzes fallen.

Nachdem sich also in diesem Falle der Brennpunkt des Augenglases auch in der Ebene des Fadenkreuzes oder zwischen diesem und dem Vorderglase befindet; so werden die Lichtstrahlen, welche von jedem Punkte des Bildes, und jene, welche von jedem Punkte der Fäden in das Augenglas fahren, von diesem gleichlaufend oder gleich zerstreut in das Aug geschicket. Das Aug S sieht also die Fäden und das Bild, wenn das Augenglas in gehöriger Stelle ist, zu gleicher Zeit deutlich. Uibrigens scheint der Gegenstand dem Auge inner oder neben der Achse gehalten immer in jenen Linien, deren Bilder auf die Fäden treffen, geschnitten.

Fig. 438. 439. Fällt aber das Bild abc nicht in die Ebene des Fadenkreuzes d; so läßt sich das Augenglas nie in eine Stelle bringen, in der es die Lichtstrahlen, welche von jedem Punk-

Punkte des Bildes, und jene, welche von jedem Punkte der Fäden herkommen, zu gleicher Zeit gleichlaufend oder gleich zerstreut nach dem Auge schicke.

Richtet man also das Augenglas so, daß man die Fäden deutlich sieht; so scheint das Bild dunkel, und beweget sich hin und her, auf und ab, mit dem Auge, wenn Fig. 438. das Bild zwischen den Fäden und dem Vorderglase steht, oder auf die entgegengesetzte Seite des Auges, wenn Fig. 439. dasselbe zwischen die Fäden und das Augenglas fällt: und richtet man das Augenglas so, daß man das Bild deutlich sieht; so scheint das Fadenkreuz dunkel, und beweget sich mit dem Auge, wenn es Fig. 439. zwischen dem Bilde und dem Vorderglase steht, und auf die entgegengesetzte Seite des Auges, wenn es sich Fig. 438. zwischen dem Bilde und dem Augenglase befindet.

Es ist nämlich aus der Erfahrung bekannt, daß sich ein dunkel gesehener Gegenstand allemal zu bewegen scheint, so oft das Aug auch einen andern deutlich sieht, und sich bewegt. Das übrige erhellet aus den Figuren.

Diese Abweichung der Fäden von dem Bilde oder des Bildes von den Fäden wird Parallachse genennt. Um solche zu vermeiden ist vonnöthen, daß sich das Gehäuse des Vorderglases oder jenes des Fadenkreuzes in einem Einschnitte längst der Seite des Fernrohres vor- und rückwärts schieben, und vermittelst einer Schraube wieder in jeder Stelle befestigen lasse. Im ersten Falle richtet man das Augenglas so, daß man die Fäden deutlich sieht, sodann rücket man das Vorderglas näher gegen den Fäden oder weiter von denselben, nachdem das dunkle Bild sich mit dem Auge auf dieselbe, oder auf die entgegengesetzte Seite bewegt, bis endlich auch dieses deutlich und ohne Parallachse erscheint. Im zweyten Falle richtet man das Augenglas so, daß man den Gegenstand deutlich sieht; und schiebet sodann das Fadenkreuz weiter von dem Vorderglase oder näher gegen denselben, nachdem die dunkelen Fäden sich mit dem Auge auf dieselbe oder auf die ent-

ge-

gegengesetzte Seite bewegen, bis endlich auch diese deutlich und ohne Parallachse erscheinen.

Ist der Abstand des Vorderglases von dem Fadenkreuze nach dieser Methode für eine beliebige Entfernung des Gegenstandes einmal bestimmt, und das bewegliche Gehäus des Vorderglases oder des Fadenkreuzes vermittelst der Schraube befestiget; so ist das Fernrohr auch auf verschiedene Entfernungen gut, aber nur so lange gut, bis der Unterscheid dieser Entfernungen so groß wird, daß wieder eine Parallachse zum Vorschein kömmt; in welchem Falle allemal jener Abstand des Vorderglases von dem Fadenkreuze nach voriger Methode abgeändert werden muß.

Von den mit einem Fernrohre versehenen Nivellirinstrumenten.

155. Die gerade Linie, welche durch den Durchschnitt der Fäden und den Mittelpunkt der Strahlenbrechung des Vorderglases geht, ist des Fernrohres **Gesichtslinie.** Sie kömmt mit der Achse des Vorderglases überein, sobald der Durchschnitt der Fäden in ebendieser Achse liegt; mit der Achse des Rohres aber fällt sie erst alsdann zusammen, wenn sowohl der Mittelpunkt der Strahlenbrechung als auch der Durchschnitt der Fäden in dieser Achse liegen.

Setzet man nun in einem Nivellirinstrumente der zwoten, dritten oder vierten Art anstatt des Lineals mit Absehen ein Fernrohr; so wird seine Gesichtslinie wie jene der Absehen in den nämlichen Fällen mit der Vertikallinie immer einen und denselben Winkel machen. Man kann also mit einem solchen Instrumente auf gleiche Entfernungen ebenso, wie mit den obigen verfahren, nur mit dem Unterscheide, daß man durch ein Fernrohr viel schärfer und viel weiter als durch Absehen sieht.

156.

156. Die huguensche Nivellirwage ist von der zwoten Art. Das Fernrohr A B wird in einem breiten metallenen mit zween gleichen Aesten D und E versehenen Ringe C befestiget, vermittelst einer Schnure und einem Ringe bey F an einem hölzernen Kreuze aufgehängt, und an dem Aste E durch ein Gewicht S beschweret. Fig. 440.

Das Fernrohr spielet in der metallenen an das Kreuz befestigten Gabel K, und das Gewicht S in dem Kasten G. Dieser wird mit Nuß-oder Leinöl, um das Schwanken des Instruments zu vermindern, gefüllt.

Das ganze wird auf einem oben etwas ausgehöhlten Dreyfuße nach jeder Stange gerichtet, und durch das hohle Kreuz L, welches sich an das andere einhäckeln läßt, gegen den Wind gesichert.

157. Die picardsche Nivellirwage ist von der dritten Art. Das viereckigte Fernrohr E H und die viereckigte Röhre A K des Senkbleys machen ein hohles messingenes Kreuz aus. E ist das Gehäuse des Vorderglases, H jenes des Fadenkreuzes uud D das Rohr des Augenglases. Das Haar A C des Senkbleys ist 4 Schuh lang, geht mitten durch das Fernrohr, welches durch die Stockbögen L und M mit der Röhre des Senkbleys verbunden ist. Vermittelst dieser Bögen wird das Instrument auf den Zapfen x und y eines Malerstaffelets aufgelegt, und auf einer Seite erhöht oder gesenket, bis das Senkbley an das Zeichen b der silbernen Platte schlägt: sodann wird die eiserne Stange N, welche rückwärts an die Röhre A K befestiget ist, und sich nur auf und ab bewegt, um das Instrument in seiner Lage fest zu erhalten, auf die Erde gelassen. Fig. 441.

158. Viel bequemer und auch zuverlässiger ist die einfache Nivellirwage der vierten Art. Fig. 442.

Der gläserne Cylinder A B der Luftblase hat 8 Linien im Durchmesser, ist 11 Zoll und die Luftblase $5\frac{1}{2}$ Zoll lang. Diese ist an jedem Ende c, a dreyfach bezeichnet, und wird durch die Schraube p gerichtet.

Der

Der Cylinder der Luftblase mn, welche in einer horizontalen auf das Fernrohr senkrechten Lage angebracht ist, hat $2\frac{1}{2}$ Zoll Länge und 5 Linien im Durchmesser. Die Blase ist 6 Linien lang, hat in der Mitte nur ein Zeichen, und wird durch die Schraube q gerichtet. Diese wird vermittelst eines Zwischenstückes durch eine Walze o an den Bogen xy, in den sie eingreift, gedrückt.

Das Fernrohr CD ist 3 Schuh lang. Das Gehäus des Fadenkreuzes ist fest gemacht, jenes des Vorderglases D aber läßt sich in einem bis 10 Linien langen Einschnitte längst dem Rohre bewegen, und in jeder Stelle durch eine Schraube e befestigen.

Die viereckigte Stange pu ist gegen 7 Zoll lang und bis 9 Linien dick.

Das ganze Instrument ist aus Messing, wird vermittelst einer Hülse qs auf einen starken Fuß gesetzt, nach jeder Stange gedreht, und durch die Schraube s befestiget.

Durch die Querblase mn und die Schraube q wird die Blase AB auf jeder Stelle auch nach der Seite in dieselbe Lage gebracht.

Von dem Höhenunterscheide des scheinbaren und wahren Horizontes.

Fig. 443. 159. Ist der Halbmesser ca der Erde und die scheinbare Horizontallinie ab bekannt; so findet man 1tens die Hypothenuse cb, wenn man aus der Summe der Quadrate beeder Katheden ca und ab die Wurzel auszieht, 2tens den Höhenunterscheid bd des scheinbaren und wahren Horizontes ab und ad, wenn man den Halbmesser ca = cd von der Hypothenuse cb abzieht.

Der Halbmesser der Erde kann für Deutschland überhaupt nach den zuverläßigsten Bestimmungen von 3273822 Pariser- oder Fortifikationsklafter angenommen werden. J. H. Lamberts Beyträge zu Picards Abhandlung vom Wasserwägen. Gesetzt nun ab

oder

oder ad sey 1000 Klafter; so ist das Quadrat des Halbmessers

$ca = 10717910487684$

das Quadrat der Tangente ab oder des Bogens

$ad = 1000000$

die Summe dieser Quadrate

$= 10717911487684$

die Wurzel aus dieser Summe

$= 3273822.1527$;

folglich giebt der Halbmesser

$ca = 3273822.0000$ abgezogen

$0°.1527 = 0'.9162 = 10''.9944$

$= 10'' \; 11''' \; 11''''$. Zum Höhenunterscheide des scheinbaren und wahren Horizontes für die Entfernung $ad = 1000$ Klafter.

160. Nach Nro. 18. ist

Fig. 443.

$ab^2 = bq \times bd$ und

$an^2 = np \times nm$

also verhält sich

$ab^2 : an^2 = bq \times bd : np \times nm$

und, wenn man bq und np für gleich annimmt, und das dritte und vierte Glied dadurch dividirt,

$ab^2 : an^2 = bd : nm.$

Es läßt sich also ohne merklichen Fehler annehmen, daß die Höhenunterscheide bd und nm des scheinbaren und wahren Horizontes sich wie die Quadrate der Entfernungen ab und an oder ad und am verhalten.

Da nun der Höhenunterscheid bd für die Entfernung $ad = 1000$ Klafter $10''.9944 = 10'' \; 11''' \; 11''''$ beträgt; so läßt sich der Höhenunterscheid nm für jede andere Entfernung am durch eine einzelne Proportion finden.

Ist z. B. $am = 500$ Klafter; so verhält sich

$$1000^2 : 500^2 = 10''.9944 : nm$$
$$4 : 1 = 10''.9944 : nm;$$

folglich ist $nm = 2''.7486 = 2''\ 8'''\ 11''''$.

Von der Erhöhung der im scheinbaren Horizonte gesehenen Punkte über dem wahren Horizonte.

Fig. 444. 161. Jeder Lichtstrahl, der von der Sonne oder einem Sterne S herkömmt, und bey e in den Dunstkreis der Erde, also aus einem dünnern in ein dichteres Mittel fährt, bricht sich in e nach dem allgemeinen Gesetze der Strahlenbrechung gegen den Halbmesser ce. Ebendieses geschieht auch in jedem Punkte d, b &c, wo derselbe aus einer dünnern in eine dichtere Luft übergeht.

Da nun die Luft von der äußersten Gränze des Dunstkreises an bis auf die Oberfläche der Erde immer dichter wird; so bricht sich der Strahl in jedem Punkte, beschreibt folglich eine krumme Linie edba und fällt nach jener Geraden af, welche die Krumme edba in dem Punkte a berührt, in das Aug.

Fig. 445. Ebendieses gilt auch für jeden Lichtstrahl, welcher von einem höhern Gegenstande z. B. von der Thurmspitze S in das Aug a zurückgeworfen wird.

Fig. 446. Liegt der gesehene Gegenstand tiefer als das Aug a; so fährt der Lichtstrahl aus einer dichtern in eine dünnere Luft, bricht sich weiter von den Verlängerungen der Halbmesser ce, cd, cb und fährt wieder nach der Tangente af in das Aug.

Vermöge des Gesetzes der Strahlenbrechung werden also alle Gegenstände, welche höher oder tiefer als das Aug sind, in einem höhern Orte, als wo sie sich befinden, gesehen.

162.

162. Jeder Punkt b der scheinbaren Horizontallinie ab liegt höher als der Berührungspunkt a; der Gegenstand, welcher aus a in b gesehen wird, befindet sich also nicht in b, sondern etwas tiefer in n. Es fällt nämlich der Lichtstrahl nach der Krummen na ebenso in das Aug a, als wenn er nach der Geraden ba herkäme. Fig. 447.

Nach J. H. Lamberts Bahn des Lichts durch die Luft kann allemal $bn = \frac{bd}{7}$ angenommen werden. Es beträgt aber bd für die Entfernung $ad = 1000$ Pariserklafter $10''.9944 = 10''\ 11'''\ 11''''$; folglich wird $dn = \frac{6}{7}bd = 9''.4237 = 9''\ 5'''\ 1''''$.

Ferner verhält sich

$$bd : ef = \tfrac{6}{7}bd : \tfrac{6}{7}ef$$
$$bd : ef = dn : fm, \text{ also}$$
$$ab^2 : ae^2 = dn : fm \text{ oder}$$
$$ad^2 : af^2 = dn : fm:$$

also läßt sich durch diese Proportion aus ad, af und dn auch allemal fm finden.

Ist z. B. $af = 500$ Klafter; so verhält sich

$$1000^2 : 500^2 = 9''.4237 : fm$$
$$4 : 1 = 9''.4237 : fm;$$

folglich ist $fm = 2''.3559 = 2''\ 4'''\ 3''''$.

Nach dieser Methode ist folgende Tafel der Erhöhungen dn der im scheinbaren Horizonte gesehenen Punkte n für die im Fortifikationsmaße angezeigten Entfernungen ad berechnet.

ad	dn	ad	dn
1000°.	9″.5‴. 1⁗.	500°.	2″.4‴. 3⁗.
975.	8. 11. 6.	475.	2. 1. 6.
950.	8. 6. 0.	450.	1.10. 10.
925.	8. 0. 9.	425.	1. 8. 5.
900.	7. 7. 7.	400.	1. 6. 1.
875.	7. 2. 7	375.	1. 3. 10.
850.	6. 9. 8.	350.	1. 1. 10.
825.	6. 4. 11.	325.	0.11. 11.
800.	6. 0. 4.	300.	0.10. 2.
775.	5. 7. 11.	275.	0. 8. 6.
750.	5. 3. 7.	250.	0. 7. 0.
725.	4. 11. 5.	225.	0. 5. 8.
700.	4. 7. 5.	200.	0. 4. 6.
675.	4. 3. 6.	175.	0. 3. 5.
650.	3. 11. 9.	150.	0. 2. 6.
625.	3. 8. 2.	125.	0. 1. 9.
600.	3. 4. 8.	100.	0. 1. 1.
575.	3. 1. 4.	75.	0. 0. 7.
550.	2. 10. 2.	50.	0. 0. 3.
525.	2. 7. 2.	25.	0. $\frac{1}{16}$. 0.

Zwote Methode zu Nivelliren.

Fig. 348. 163. Ist man mit was immer für einem Instrumente o, wodurch man auf jeder Stelle a eine auf die Vertikallinie a u senkrechte Gesichtslinie o d erhält, versehen, und man nimmt einen Vergleichungsplan x y in beliebiger Höhe b y an; so findet man 1tens vermittelst der in b senkrecht aufgehaltenen Stange die Höhe b n des in d gesehenen

nen Punktes n über dem Punkte b, 2tens aus der Entfernung ab vermittelst der Proportion Nro. 162. die Erhöhung cn des Punktes n über dem wahren Horizonte oc; sodann giebt 3tens cn von bn abgezogen die wahre Höhe bc des Instruments über dem Punkte b, und endlich 4tens diese Höhe bc von by abgezogen die wahre Tiefe cy = ou des Instruments unter dem Vergleichungsplane xy.

Ist z. B. ab = 1000 Klafter
by = 40′ 0″ 0‴,
und........bn = 9′ 7″ 6‴;
so ist......cn = 0′ 9″ 5‴,
also........bc = 8′ 10″ 1‴,
und........cy = 31′ 1″ 11‴.

Nimmt man ferner jeden Punkt f an, mißt af und fm (denn m wird in g gesehen); so findet man em durch die Tafel oder die Proportion Nro. 162., sodann giebt em von fm abgezogen fe die wahre Tiefe des Punktes f unter dem Instrumente, und fe zu cy = ez addirt die wahre Tiefe des Punktes f unter dem Vergleichungsplane xy.

Ist z. B af = 850 Klafter
und........fm = 10′ 8″ 7‴;
so ist......em = 0′ 6″ 10‴,
also ......fe = 10′ 1″ 9‴
und........fz = 41′ 3″ 8‴.

Nachdem man einmal die wahre Tiefe cy des Instruments unter dem angenommenen Vergleichungsplane gefunden hat; so kann man die Tiefe eines jeden aus den Punkten, welche tiefer als das Instrument in jeder Entfernung von a ringsherum liegen, ebenso wie die Tiefe fz des Punktes f unter ebenjenem Vergleichungsplane finden.

Ferner läßt sich die wahre Tiefe kz = ox des Instruments über h durch die gefundene Tiefe fz ebenso, wie die wahre Tiefe des Instruments über a durch die angenommene Tiefe by bestimmen. Denn berechnet man aus hf die Erhöhung kr des in l gesehenen Punktes r,

und zieht kr von fr ab; so erhalt man fk: sodann giebt fk von fz abgezogen die verlangte Tiefe kz = ox.

Von der Berichtigung der Nivellirinstrumente.

Fig. 448. 164. Ein Nivellirinstrument so einrichten, daß es in jeder Stelle a oder h eine auf seine Vertikallinie senkrechte Gesichtslinie giebt, heißt dasselbe **berichtigen.** Es kömmt nur darauf an, daß man 1tens mit dem über a gestellten noch unberichtigten Instrumente o auf der Stange bd den Punkt c, welcher mit dem Punkte o der Gesichtslinie gleichhoch ist, finde: 2tens daß man aus der Entfernung ab die Erhöhung cn des im scheinbaren Horizonte od gesehenen Punktes n über dem wahren Horizonte oc berechne, und den Punkt n auf der Stange anmerke: endlich 3tens, daß man die Gesichtslinie nach ebendiesem Punkte n richte, und in dieser Lage das Instrument befestige.

Fig. 449. 450. 165. Stellet man was immer für ein Instrument o, dessen Gesichtslinie mit seiner Vertikallinie immer denselben Winkel macht, über jeden Punkt e, nimmt eb = ea, und mißt die Höhen bp und aq der Gesichtslinien op und oq über den Punkten b und a; so sind die Punkte p und q gleichhoch. Stellet man ferner das Instrument über a nach der Stange bp so, daß das Senkbley, welches man neben dem Fernrohre an der Stelle des Fadenkreuzes oder neben dem Augenabsehen des Lineals aufhält, gerade auf den Pflock a fällt, zieht sodann das Augenglas ganz heraus, und schließt, wenn es vonnöthen ist, das Fernrohr auf der Seite des Vorderglases, daß man das Fadenkreuz mit freyem Auge sehen kann, und mißt endlich durch die anstatt des Senkbleys aufgehaltene Stange die Höhe ag des horizontalen Fadens eines Fernrohrs oder des horizontalen Einschnittes des Absehens eines Lineals über dem Pflocke a; so wird auch der Unterscheid qg = pc bekannt: also giebt qg Fig. 449.

von b p abgezogen, oder Fig. 450. zu b p addirt die Höhe des mit g gleichhohen Punktes c über dem Punkte b.

166. Ist der Winkel fec = hgc; so haben die Dreyecke fec und hgc die Seiten ce und cg und die zween daranliegenden Winkel wechselweise gleich: folglich sind auch die Seiten cf und ch und die Höhenunterscheide fg und he gleich. Ist nun der Halbmesser ca der Erde um etliche Schuhe kleiner als ce, und man legt die Figur bacd auf die Figur fecg so, daß die gleichen Winkel bac und fec zusammenfallen; so werden sich auch die in Ansehung ihrer so großen und fast gleichen Halbmesser sehr kleinen Bögen ad und eg für unsere Empfindung so gut als decken: folglich kann man ohne den geringsten Fehler zu begehen bd allemal gleich fg oder he annehmen. Fig. 451. 452.

167. Stellt man also ein Instrument o, dessen Gesichtslinie mit seiner Vertikallinie immer denselben Winkel macht, 1tens über b wie oben nach der Stange af und mißt af und be, sodann 2tens über a nach der Stange bh und mißt bh und ag, und stellet sich die mit ef Gleichlaufende gl nebst den wahren Horizonten lk, ed und gc vor; so ist nach Vorigem hc = fd = gk = cl, und fg = el. Man findet also aus af und ag 1tens gf = el, sodann aus el und be 2tens bl, ferner aus bl und bh 3tens lh, endlich aus $\frac{1}{2}$ lh oder lc und bl 4tens bc die Höhe des mit g gleichhohen Punktes c über dem Punkte b. Fig. 453. 454.

168. Oder mißt man be und af und sodann ag und bh wie zuvor, und nimmt einen Vergleichungsplan xy von einer beliebigen Höhe by an; so ist Fig. 455. Fig. 455. 456.

1tens $ey + af = dx + af = ax + df = ax + ch$.

2tens $ey + af - ag = gx + ch = cy + ch$.

3tens $ey + af - ag + bh = cy + ch + bc + ch = by + 2ch$.

Und Fig. 456.

1tens $ey + af = dx + af = ax - df = ax - ch$.

2tens $ey + af - ag = gx - ch = cy - ch$.
3tens $ey + af - ag + bh = cy - ch + bc - ch = by - 2ch$.

Findet man also $ey + af - ag + bh$ größer als by, also $= by + 2ch$; so giebt der halbe Unterscheid ch Fig. 455 von bh abgezogen die Höhe bc des mit g gleichhohen Punktes c über dem Punkte b: und findet man $ey + af - ag + bh$ kleiner als by, also $= by - 2ch$; so giebt der halbe Unterscheid ch Fig. 456. zu bh addirt die Höhe bc des verlangten Punktes c über dem Punkte b.

Kurz, bestimmet man ax durch by und sodann by wieder durch ax ebenso, als wenn die Zielpunkte f und h in den wahren Horizontallinien ed und gc lägen; so wird ax um $df = ch$, also das gesuchte by um 2ch Fig. 455. zu groß, und Fig. 456. zu klein. Nachdem also das gefundene by größer oder kleiner als das angenommene by wird; so giebt ihr halber Unterscheid von bh abgezogen oder zu bh addirt die Höhe bc des verlangten Punktes c über dem Punkte b.

Fig. 448. 169. Sucht man, nachdem bc einmal bekannt ist, nach Nro. 162. aus der Entfernung ab die Erhöhung cn des von o aus im scheinbaren Horizonte gesehenen Punktes n über dem wahren Horizonte oc, addirt cn zu bc, befestiget den Zielpunkt der Nivellirstange in der Höhe bn, und hält sie über dem Punkte b auf; so muß man den Zielpunkt n von o aus in der Gesichtslinie od sehen, wenn diese mit der Vertikallinie des Instrumentes einen rechten Winkel machen soll.

Tab. XIX. XXI. Fig. 457. 458. Fasset man daher das Fadenkreuz d in einen Schieber, der sich Fig. 457. in dem Absehen des Lineals und Fig. 458. in dem Gehäuse des Fernrohrs durch die Schraube r erhöhen oder senken läßt; so kann vermittelst dieser Schraube die Gesichtslinie des immer noch über a unverrückten Instruments allemal nach dem Punkte n gerichtet, und auf solche Art das Instrument berichtiget werden.

Je-

Jede Schraube r, wodurch man die Gesichtslinie in den scheinbaren Horizont bringt, heißt **Berichtigungsschraube.**

170. Bey einem Instrumente der zwoten Art kann man das Fadenkreuz unbeweglich lassen, und sich anstatt der Schraube r eines kleinen Gewichtes, welches sich an jedem Arme des Lineals oder Fernrohres anmachen, hin und her bewegen, in jeder Stelle befestigen und ablösen läßt, bedienen. Dieses Gewicht senket die Gesichtslinie, wenn es an dem Arme gegen der Stange angebracht wird, und erhöht dieselbe, wenn es sich an dem Arme gegen dem Auge befindet, und zwar in beeden Fällen um so mehr, je weiter man dasselbe von der Mitte entfernet. Zu dieser Absicht kann Fig. 440. ein messigener Ring d dienen.

Fig. 440.

171. An einem Instrumente der dritten Art, kann anstatt der Berichtigungsschraube r eine andere d oder e so angebracht werden, daß jene d die Platte, worauf das Zeichen des Senkbleys ist, oder diese e den Punkt, woran das Haar des Senkbleys befestiget ist, beweget. Denn richtet man ohne auf das Senkbley Acht zu geben, die Gesichtslinie nach dem Punkte n, und sodann durch die Schraube d das Zeichen, woran das Senkbley schlagen soll, auf das Haar, oder durch die Schraube e dieses Haar auf jenes Zeichen; so ist das Instrument berichtiget.

Tab. XXI. Fig. 441. 459.

172. Ebenso läßt sich anstatt der Schraube r eines Instruments der vierten Art eine andere d, welche den gläsernen Cylinder erhöht oder erniedriget, anwenden. Denn richtet man ohne auf die Luftblase Acht zu geben, die Gesichtslinie durch die Schraube p nach dem Punkte n, und setzet sodann die Luftblase vermittelst der Schraube d wieder in ihre angewiesene Lage; so ist die Berichtigung fertig.

Fig. 458. 442.

Da die Querblase m n zu nichts anders als die Luftblase AB in jeder Stelle auch nach der Seite in einer und derselben Lage zu erhalten dienet; so bedarf das Instrument wegen dieser Blase m n keiner besondern Berichtigung.

Fig. 442.

Fig. 457. 173. Wenn man bey einem Instrumente mit Absehen durch die Schraube r das Fadenkreuz erhöht oder senket: so drehet sich die Gesichtslinie um die Oeffnung des Absehens beym Auge; also bleibt die Höhe a g der Gesichtslinie vor und nach der Berichtigung dieselbe.

Fig. 458. 440. 441. Erhöht oder senket man aber durch die Schraube r das Fadenkreuz eines Fernrohres; so dreht sich die Gesichtslinie um den Mittelpunkt der Strahlenbrechung des Vorderglases: und erhöht oder senkt man die Gesichtslinie eines jeden Instruments durch jede andere Schraube nach Nro. 170. 171. oder 172.; so drehet sich dieselbe um ihren Durchschnitt mit der Vertikallinie; also bleibt in diesen zween letztern Fällen die Höhe a g Tab. XXII. Fig. 455. 456. der Gesichtslinie nach der Berichtigung nimmermehr dieselbe. Darf man, um die Gesichtslinie auf den Punkt n zu bringen, nur eine geringe Bewegung machen; so bleibt der Fehler, welcher aus der veränderten Höhe a g entsteht, unempfindlich: ist aber um die Gesichtslinie auf n zu bringen eine grosse Bewegung zu machen; so verbessert eine zwote Berichtigung den Fehler der ersten.

Fig. 448. 174. Nimmt man für ein Instrument mit Absehen die Entfernung a b von 50 Klaftern; so kann c n = $\frac{1}{4}$ Linie vernachläßiget werden: für ein Instrument mit einem Fernrohre ist die Entfernung a b von 300 oder 400 Klafter zur Berichtigung hinlänglich.

Es versteht sich von selbst, daß man, so oft an der Berichtigungsschraube, an dem Fadenkreuze oder an dem Vorderglase eine Aenderung vorgeht, die Berichtigung wiederholen muß.

175. Diese Berichtigungsmethode passet auf jedes Nivellirinstrument, und kann auf jedem ebenen Erdreiche in sehr kurzer Zeit bewerkstelliget werden. Alles, was dabey zu verrichten vorkömmt, läßt sich leicht und genau ausführen, und es werden dazu so wenig Bewegungen als ein Nivellirinstrument nur haben kann, erfordert. Sie ist daher auch zuverläßiger als jede andere, welche mehr zusammengesetzet ist, oder ein zusammengesetztes Instrument

ment voraussetzet. Man verliert bey jedem Instrumente durch die Zusammensetzung, so oft die Richtigkeit der Bewegungen des einen Theiles von der Richtigkeit der Bewegungen eines andern Theiles abhängt.

Das Nivellirinstrument, dessen Fernrohr auf jeder Seite mit einem Vorderglase und einem Fadenkreuze versehen ist, damit man vermittelst des Augenglases auf der einen Seite eingeschoben, vorwärts und auf der andern Seite eingeschoben, rückwärts nach der Achse des Rohres sehen soll, jenes, dessen einfaches Fernrohr sich auf dem Gestelle in einem scheinbaren Horizonte drehen soll, und endlich jenes, welches aus zwey verkehrten Fernrohren besteht, deren Gesichtslinien in einer und derselben scheinbaren horizontalen Ebene liegen sollen, ist also dem oben angeführten einfachen Instrumente der vierten Art Fig. 442. allezeit nachzusetzen.

Die eigene Berichtigung eines jeden aus diesen Instrumenten setzet allemal die Erfüllung jener Bedingnisse voraus, und diese fordern Einrichtungen, welche allemal theils schwerer, theils lange nicht so hinreichend, als die allgemeine Berichtigung sind.

Das Beste, was man thun kann, wenn man nur ein zusammengesetztes Instrument bey Handen hat, ist, daß man alle Schrauben, außer jene, welche zu den Bewegungen eines einfachen vonnöthen sind, befestige, das Instrument ebenso wie ein einfaches berichtige, und sich auch dessen nur wie eines einfachen bediene.

Anwendung.

176. Soll man eine Linie A O vermittelst eines berichtigten Instrumentes mit einem Fernrohre nach der zwoten (Fig. 460.)

ten Methode Nro. 163. nivelliren; so hat man die zum Beyspiele nachstehende Tabelle zu verfertigen:

Stände des Instrum	I. Entfernungen von dem Instrumente.	II. Gemessene Tiefen unter der Gesichtslinie.	III. Erhöhungen über dem wahren Horizonte.	IV. Wahre Tiefen unter der Gesichtslinie.	V. Tiefen unter dem Vergleichungsplane.
Angenommene Tiefe des Punktes.					A.20′ 0″ 0‴
P.	A.800°	6′.7″8‴	0′ 6″ 0‴	6′ 1″8‴	p.13′10″ 4‴
	B. 575	9. 8. 2	0. 3. 1.	9. 5. 1.	23. 3. 5.
	C. 325.	8.10. 5.	0. 1. 0.	8. 9. 5.	22. 7. 9.
	D.750.	11. 2. 0.	0. 5. 4.	10. 8. 8.	24. 7. 0.
Q.	D.900.	5.10.11.	0. 7. 8.	5. 3. 3.	q. 19. 3. 9.
	E. 525.	4. 6. 7	0. 2. 7.	4. 4. 0.	23. 7. 9.
	F. 300.	9.11. 9	0. 0.10.	9.10.11.	29. 2.10.
	G. 450.	2.11.11.	0. 1.11.	2.10. 0.	22. 1. 9.
	H. 675	1. 0.10.	0. 4. 4.	0. 8. 6.	20. 0. 3.
	L. 925.	2. 0. 7.	0. 8. 1.	1. 4. 6.	20. 8. 3.
R.	L. 850.	7.10. 1.	0. 6. 10.	7. 3. 3.	r. 13. 5. 0.
	M.375.	10. 5. 3.	0. 1. 4.	10. 3.11.	23. 8.11.
	N. 225.	3.10. 4.	0. 0. 6.	3. 9.10.	17. 2.10.
	O. 400.	0.11.11.	0. 1. 6.	0.10. 5.	14. 3. 5.

Die

Die erste und zwote Reihen dieser Tabelle werden auf dem Felde aus den gefundenen Maßen selbst verfertiget: die dritte Reihe findet man zu Hause aus der ersten nach Nro. 162. und zieht man die dritte von der zwoten ab; so erhält man die vierte. Für die fünfte Reihe werden die Tiefen p, q, r, der Gesichtslinien gefunden, wenn man die wahre Tiefe des ersten Punktes unter der Gesichtslinie eines jeden Standes von der Tiefe ebendieses Punktes unter dem Vergleichungsplane abzieht: sodann erhält man die Tiefe eines jeden aus den übrigen Punkten desselben Standes, wenn man seine wahre Tiefe unter der Gesichtslinie zu der Tiefe ebendieser unter dem Vergleichungsplane addirt.

177. Weil nach Nro. 162. die Erhöhung eines im scheinbaren Horizonte auf die Entfernung von 25, 50, 75 oder 100 Klafter gesehenen Punktes über dem wahren Horizonte nur $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ oder 1 Linie beträgt; so kann diese Erhöhung für die zwo erstern Entfernungen allzeit und für die zwo letztern meistentheils vernachläßiget werden. In diesem Falle bleiben also die dritte und vierte Reihen voriger Tabelle weg, und die Reihe der Tiefen unter dem Vergleichungsplane wird sogleich durch die zwote Reihe ebenso wie zuvor durch die vierte bestimmt. Folgende Tabelle kann zum Beyspiel dienen: Fig. 460.

L

	I.			II.			III.	
Stände des Instrum.	Entfernungen von dem Instrumente.	Tiefen unter der Gesichtslinie.			Tiefen unter dem Vergleichungsplane.			
Angenommene Tiefe.					A. 20′	0″	0‴	
P.	A. 80°	6′.	7″.	8‴.	p.	13′.	4″.	4‴.
	B. $57\frac{1}{2}$.	9.	8.	2.		23.	1.	1.
	C. $32\frac{1}{2}$.	8.	10.	5.		22.	2.	9.
	D. 75.	11.	2.	0.		24.	6.	4.
Q.	D. 90.	5.	10.	11.	q.	18.	7.	5.
	E. $52\frac{1}{2}$.	4.	6.	7.		23.	2.	0.
	F. 30.	9.	11.	9.		28.	7.	2.
	G. 45.	2.	11.	11.		21.	7.	4.
	H. $67\frac{1}{2}$.	1.	0.	10.		19.	8.	3.
	L. $92\frac{1}{2}$.	2.	0.	7.		20.	8.	0.
R.	L. 85.	7.	10.	1.	r.	12.	9.	11.
	M. $37\frac{1}{2}$.	10.	5.	3.		23.	3.	2.
	N. $22\frac{1}{2}$.	3.	10.	4.		16.	8.	3.
	O. 40.	0.	11.	11.		13.	9.	10.

178. Ist eine Linie AO auf eine oder die andere Methode nivellirt; so wird der Durchschnitt oder das Profil der Erde nach der Linie AO gezeichnet, wenn man eine beliebige Gerade x y für den Vergleichungsplan annimmt, und die Entfernungen der Punkte A, B, C, D &c. von einander aus der ersten Reihe der Tabelle sucht,

und

und von x an gegen y nach dem verjüngten Maße aufträgt, sodann durch die Endpunkte ebendieser Entfernungen die Senkrechten auf xy zieht, auf diesen Senkrechten nach der letzten Reihe der Tabelle die mit den Punkten A, B, C, D &c. gleichnamigen Punkte a, b, c, d &c. bestimmt, und diese endlich ebenso wie jene miteinander verbindet.

179. Verlangt man nur den Höhenunterscheid der Punkte A und O zu kennen: so sind keine Zwischenpunkte außer D und L vonnöthen; also wird die Tabelle Nro. 176. folgende: Fig. 460.

	I.	II.	III.	IV.	V.
Stände des Instrum.	Entfernungen von dem Instrumente.	Gemessene Tiefen unter der Gesichtslinie.	Erhöhungen über dem wahren Horizonte.	Wahre Tiefen unter der Gesichtslinie.	Tiefen unter dem Vergleichungsplane.
Angenommene Tiefe.					A. 20′ 0″ 0‴
P.	A. 800°	6′ 7″ 8‴	0′ 6″ 0‴	6′ 1″ 8‴	p. 13. 10 4.
	D. 750.	11. 2. 0.	0. 5. 4.	10. 8. 8.	24. 7. 0.
Q.	D. 900.	5. 10. 11.	0. 7. 8.	5. 3 3.	q. 19. 3. 9.
	L. 925.	2. 0. 7.	0. 8. 1.	1. 4. 6.	20. 8. 3.
R.	L. 850.	7. 10. 1.	0. 6. 10.	7. 3. 3.	r. 13. 5. 0.
	O. 400.	0. 11. 11.	0. 1. 6.	0. 10. 5.	14. 3. 5.

Und die Tabelle Nro. 177. wird in ebendiesem Falle folgende:

I.

	I.	II.	III.
Stände des Instrum.	Entfernungen von dem Instrumente.	Tiefen unter der Gesichtslinie.	Tiefen unter dem Vergleichungsplane.
Angenommene Tiefe.			A. 20′ 0″ 0‴
P	A. 80.	6′ 7″ 8‴	p. 13. 4. 4.
	D. 75.	11. 2. 0.	24. 6. 4.
Q	D. 90.	5.10. 11.	q. 18. 7. 5.
	L. $92\frac{1}{2}$.	2. 0. 7.	20. 8. 0.
R	L. 85.	7.10. 1.	r. 12. 9.11.
	O. 40.	0.11. 11.	13. 9.10.

Fig. 460. 462. 180. Bey dem vorigen Verfahren ist es gar nicht vonnöthen, daß die Punkte P, D, Q, L und R in einer Geraden A O liegen: man kann ohne Unterscheide wie zuvor zu Werke gehen, wenn auch diese Punkte Fig. 462. was immer für eine Lage haben.

Fig. 463. Hieraus erhellet, daß man auch eine gerade Linie A L über die höchsten Berge her nivelliren kann, wenn man jede zween Punkte derselben, welche steile Höhen absöndern, durch Umwege vermittelst eines und desselben Vergleichungsplanes miteinander verbindet. Und nimmt man alle nivellirte Punkte dieser Geraden durch was immer für ein Instrument auf; so erhält man auch den Durchschnitt al der Oberfläche der Erde nach der Geraden A L, wenn man x y gleichlaufend mit A L, und A a, B b, C c &c. senkrecht auf x y zieht, auf diesen Senkrechten die gefundenen Tiefen der Punkte A, B, C &c. unter dem Vergleichungs-

gleichungsplane von x y an in a, b, c &c. aufträgt, und noch durch Zeichnung diese Punkte ebenso wie jene zusammen hänget.

181. Wenn man in der Vertikallinie Y O einen Punkte u, welcher mit A gleichhoch, um eine gegebene Größe höher oder tiefer als A liegt, bestimmen soll, und man nimmt die Tiefe des Punktes A unter dem Vergleichungsplane wie immer an; so wird auch durch den gegebenen Höhenunterscheid der Punkte A und u die Tiefe des Punktes u unter ebenjenem Vergleichungsplane bekannt: sucht man also nach Nro. 179. auch die Tiefe des Punktes O unter ebendemselben; so erhält man den verlangten Höhenunterscheid der Punkte O und u. Dieser Höhenunterscheid wird sodann nur auf dem Pflocke O aufgeschrieben, oder nach der Bedingung der Aufgabe auf einer Stange, die man in O senkrecht aufrichtet, eingeschnitten, oder aber durch einen Pflock, den man in gehöriger Tiefe eingrabet, angemerkt. Fig. 460.

Hat man z. B. die letzte Tabelle durchs Nivelliren der Punkte A und O gefunden, und u soll mit A gleichhoch seyn: so ist die Tiefe des Punktes u unter dem Vergleichungsplane = 20′ 0″ 0‴; also muß u um 6′ 2″ 2‴ tiefer als O eingegraben werden: und soll u um 12 Schuh höher als A liegen; so ist die Tiefe des Punktes u unter dem Vergleichungsplane = 8′ 0″ 0‴, also u um 5′ 9″ 10‴ höher als O einzuschneiden.

182. Soll man in der Geraden A O gegen O auf der Oberfläche der Erde einen Punkt Z, welcher mit A gleichhoch, um eine gegebene Größe höher oder tiefer als A liegt, bestimmen; so nimmt man wieder in beliebiger Höhe über A einen Vergleichungsplan an, berechnet aus der angenommenen Tiefe des Punktes A und dem gegebenen Höhenunterscheide der Punkte A und Z die Tiefe des Punktes Z, und nivellirt von A gegen O (indem man zugleich die Tiefen der Gesichtslinien, und jene der angenommenen Punkte auf jedem Stande berechnet) solange fort, bis endlich die Tiefe der Gesichtslinie von jener Fig. 460.

des

des Punktes Z so wenig unterschieden ist, daß der Punkt Z nicht mehr ferne seyn kann. Sodann befestiget man das Zeichen des Zielpunktes der Nivellirstange in jener Höhe, die heraus kömmt, wenn man die Tiefe der Gesichtslinie von der Tiefe des Punktes Z abzieht, und rücket in der Geraden AD die Nivellirstange solange vor- oder rückwärts, bis endlich der Zielpunkt der Stange in die Gesichtslinie fällt, folglich diese den verlangten Punkt Z auf der Erde zeigt.

Soll z. B. der Punkt Z um 4 Schuhe höher als A liegen, und man hat durchs Nivelliren von A bis in R die letzte Tabelle gefunden; so ist die Tiefe des Punktes A = 20′ 0″ 0‴
also jene des Punktes Z = 16′ 0″ 0‴
und jene der Gesichtslinie r = 12′ 9″ 11‴
also ihr Unterscheid = 3′ 2″ 1‴.
Folglich giebt das Zeichen des Zielpunkts der Nivellirstange in der Höhe = 3′ 2″ 1‴ befestiget, den Punkt Z auf der Erde.

Fig. 464. 183. Ist der Punkt F der Geraden BF, welche in einer gegebenen Tiefe AB unter A durchgeht, und von B gegen F einen gegebenen, z. B. auf jede Klafter 2 Zoll, Fall hat, zu bestimmen; so findet man nach Nro. 182. den Punkt C der um AB tiefer als A liegt; berechnet sodann den Fall auf die Entfernung AC und sucht den Punkt D, der um diesen Fall tiefer als C liegt; berechnet ferner den Fall auf die Entfernung CD, und sucht den Punkt E, der um diesen Fall tiefer als D liegt; berechnet abermal den Fall auf die Entfernung DE, und sucht den Punkt F, welcher um diesen Fall tiefer als E liegt u. s. f. bis endlich eine Entfernung EF so klein wird, daß ihr Fall nicht mehr in Betrachtung gezogen werden kann.

Fig. 465. 184. Soll bey der vorigen Aufgabe die Linie BF anstatt von B gegen F, itzt von F gegen B fallen; so sucht man den Punkt C der um AB tiefer als A liegt;

berechnet sodann den Fall auf die Entfernung A C, und sucht den Punkt D der um diesen Fall höher als C liegt; berechnet ferner den Fall auf die Entfernung C D, und sucht den Punkt E der um diesen Fall tiefer als D liegt; berechnet abermal den Fall auf die Entfernung D E, und sucht den Punkt F der um diesen Fall höher als E liegt u. s. f. bis endlich eine Entfernung F E so klein wird, daß ihr Fall vernachläßiget werden kann.

Nach diesem und dem vorigen Verfahren erhält man nämlich für jede aus den Geraden B D, B E, B F einen Fall, welcher nur der Länge der unmittelbar vorhergehenden B C, B D, B E zukömmt. Beydes giebt also eine Annäherung, die um so leichter auszuführen ist, als das Instrument dabey unverrückt stehen bleibt, indem man jedesmal nach berechnetem Falle nur das Zeichen des Zielpunktes an der Stange um soviel höher oder tiefer befestiget.

185. Ist eine ganze Gegend zu Nivelliren, so nimmt man die Standpunkte P, Q, R &c. so an, daß man daraus die Erhöhungen und Vertiefungen des Erdreichs übersehen kann, und verfertiget aus den in P, Q, R &c. gefundenen Tiefen der Punkte A, B, C &c. unter der Gesichtslinie die zwote Reihe der Tabelle Nro. 176. Fig. 466.

Sodann nimmt man die Standpunkte P, Q, R &c. sowohl als alle nivellirten Punkte A, B, C &c. durch den Meßtisch genau auf, sucht auf dem Plane vermittelst des Zirkels und des verjüngten Maßstabes die Entfernungen der Punkte A, B, C &c. von dem Instrument, und verfertiget daraus die erste und hernach wie Nro. 176. alle übrigen Reihen ebenjener Tabelle. Endlich schreibt man noch in dem Plane neben jeden aus den nivellirten Punkten die ihm zugehörige Tiefe der fünften Reihe an.

186. Nivellirt man immer auf kleine Entfernungen; so darf man nur die zwote Reihe der Tabelle Nro. 177. wie zuvor verfertigen, aus dieser die dritte Reihe berechnen, und die gefundenen Tiefen der dritten Reihe dem aufgenommenen Plane noch gehörig einschreiben.

187. Sind einmal alle Punkte einer Gegend oder einer Linie nach einem beliebigen Vergleichungsplane bestimmt; so bringt man sie auf einen Vergleichungsplan, der durch einen jeden aus jenen Punkten geht, wenn man die Tiefe dieses Punktes von den Tiefen aller niedrigern, und die Tiefen aller höhern von der Tiefe ebendieses Punktes abzieht, und um die Zweydeutigkeit zu vermeiden, die Unterscheide der niedrigern Punkte mit schwarzer, und jene der höhern Punkte mit rother Dinte schreibt.

Fig. 467. 188. Nivellirt man nach Nro. 176. längst einem Flusse der Punkte A, B, C, D, E, F; so findet man die Rösche des Flusses für jede Wasserhöhe, wenn man bey windstiller Witterung noch die Tiefen der Punkte a, b, c, d, e, f, der Oberfläche des Wassers unter ebenjenen Punkten nach Nro 167. ausfindig macht.

Fig. 468. Ist ein Fluß E mit einem andern A zur Beförderung der Schiffahrt durch einen Kanal zu vereinigen; so nivellirt man eine Linie AE nach Nro. 176. damit man von der Möglichkeit des Unternehmens urtheilen, die Tiefen der Bettung des Kanals unter dem Vergleichungsplane für soviel Punkten A, B, C, D, E als vonnöthen sind, berechnen, und sodann ebendiese Punkte nach Nro. 181. auf dem Erdreiche bestimmen kann.

Fig. 469. Ebenso geht man zu Werke, wenn man einen Morast A durch einen Kanal AE in einen Fluß E abführen und austrocknen, oder was immer für eine Wasserleitung ausführen soll.

Fig. 467. Da man bey dergleichen Unternehmungen selten nach einer geraden Linie fortgehen kann; so nimmt man anstatt die Entfernungen auf dem Erdreiche zu messen, alle Stand- und nivellirte Punkte auf, und verfertiget die erste Reihe der Tabelle vermittelst des verjüngten Maßes. In diesem Falle stellet man die verschiedenen Höhen der nivellirten Punkte auch durch die Zeichnung vor, wenn man auf dem Plane eine beliebige Gerade xy als den Vergleichungspalan annimmt, aus allen nivellirten Punkten die Senkrechten auf xy zieht, auf diesen von xy an die Tiefen

der

der nivellirten Punkte in a, b, c, d, e, f aufträgt, und endlich diese noch gehörig verbindet.

Ist ein Damm, der von A nach B, C, D, E, horizontal, von A bis E auf jede Klafter eine Steigung, oder einen Fall hat, zu führen: so bestimmt man den Punkt E nach der Bedingung, zieht aus allen übrigen die Senkrechten B1, C2, D3, auf AE, berechnet die Höhenunterscheide der Punkte 1, 2, 3 auf ihre Entfernungen A1, A2 &c. in der Geraden AE, und macht B, C, D gleichhoch mit 1, 2, 3. Fig. 468.

Die Durchschnitte der Böschung und des Erdreichs werden für jeden Punkt A, B &c. nach Nro. 183 und 184 gefunden.

Oder auch, wenn man die Höhe eines jeden Punktes B des Damms über dem Erdreich, die Hälfte, zweydrittel oder das doppelte davon, horizontal, und senkrecht auf seine Richtung AB aufträgt, (nachdem die Anlage der Böschung, der Höhe gleich, nur die Hälfte, zweydrittel, oder das doppelte von dieser ist,) sodann am Ende eine Stange eingräbt, auf dieser die Tiefe des Erdreichs unter B durch einen Einschnitt anmerket; und eine Latte längst diesem Einschnitt und den Punkt B solange abwärts verlängert, bis sie das Erdreich schneidet, und sie dann in dieser Lage befestiget.

Sind nun von Entfernung zu Entfernung solche Durchschnitte geschlagen, so erhält man deren mehrere, wenn man von dreyen 3' hohen, 3" breiten, $\frac{1}{2}$" dicken hölzernen Kreuze, zwey auf schon bestimmte Punkte z. B. A und B aufhalten läßt, und das dritte längst einer Stange zwischen A und B solange höher oder niedriger beweget, bis die obern Kanten, und folglich auch die untern, in einer Ebene liegen; diesen Punkt bemerket, und endlich eine Latte an diesen gefundenen Punkt der Stange auf oder abwärts schiebet, bis sie sich mit den schon geschlagenen decket, und folglich in der Ebene der Böschung liegt.

Ist die Breite des Damms ausgesteckt, so werden die Punkte der andern Seite durch A, B, C, D, E gefunden, und die Durchschnitte der Böschung und des Erdreichs wie vorher bestimmt.

Fig. 470. 189. Ist an einem gegebenen Orte A eine Festung anzulegen; so wird vorher die ganze Gegend nach Nro. 185. oder 186. rings um den Ort nivellirt. Auf dem nivellirten Plane werden nach den verschiedenen Anhöhen der Gegend die Höhen und Lagen der Festungswerke bestimmt. Die Figur der Festung wird nach Nro. 190. (1te Th. M.) ausgestecket, und die gegebenen Höhen oder Tiefen der Punkte ihrer Werke werden auf der Erde nach Nro. 181. ausfindig gemacht. Endlich werden zum Beschlusse noch alle Punkte der schon hergestellten Festung, und alle jene Geraden, welche die aus- und eingehenden Winkel des Umfanges halbiren und ringsum in das Feld verlängert werden, nivellirt, und die Tiefen aller Punkte dem Plane eingetragen, oder auch nur in einer Tabelle verwahret.

Liegt die Festung an einem Flusse GN; so erkennt man aus ebenjenem ersten nivellirten Plane, wo und wie hoch eine Schleusse B und ein Damm DE anzulegen sind, damit man eine vortheilhafte Ueberschwemmung DEGH erhalten möge. Die einmal gegebenen Höhen einer Schleusse oder eines Dammes werden auf der Erde wieder nach Nro. 181., die Gränzen aber der Ueberschwemmung nach Nro. 182. ausfindig gemacht.

Fig. 471. 190. Soll ein Berg A bis auf eine scheinbare horizontale Ebene, welche in einer gegebenen Tiefe, unter dem Punkt A durchgeht, abgetragen, und der körperliche Inhalt, der zu verführenden Erde berechnet werden; so suchet man nach Nro. 182. die Punkte b, c, d, e, f, g, h, k, l so tief unter A als es die Ebene seyn soll, so werden diese Punkten dem Durchschnitt jener Ebene und der Oberfläche des Berges bestimmen: theilt durch die Punkte m, n, o, p, q die ganze Figur, so in Dreyecke ein, daß alle Punkte der Oberfläche, welche sich zwischen den Scheiteln eines Dreyeckes befinden, dem Auge nach

in der Ebene eben dieser Scheitel liegen, und stellt sich durch die Seiten der Dreyecke vertikale Ebenen vor, so wird der ganze Erdkörper, in lauter dreyseitige, auf einer Seite schief abgeschnittene rechte Prismen eingetheilt, wovon keine Seite wie in dem Prismen m n q, zwo wie in m d e oder eine wie in m n d gleich Null sind.

Die senkrechten Schnitte, findet man durch das Aufnehmen, und die Seiten dieser Prismen, durch das nivelliren der Punkte m, n, o, p, q mit A, indem man die Höhenunterscheide der Punkte, die über A liegen, zu der Höhe des Punktes A über der Ebene addirt: und die Höhenunterscheide jener, die unter A liegen, von dieser Höhe abzieht.

ist z. B. die Ebene 20′ unter A,
der Punkt m 11′ über A und
der Punkt n 7′ unter A so ist
m 31′ und n, 13′ über der Ebene.

Sollten diese Unterscheide verneinend werden, so lägen diese Punkte unter der Ebenen, diese Prismen müßten angeschüttet, und von der zu verführenden Erde abgezogen werden.

Soll jene Ebene, bis auf welche der Berg abgetragen werden soll, von x gegen y einen bestimmten Fall haben z. B., auf jede Klafter 2″, so findet man erstens nach Nro. 183. den Punkt y, und nach Nro. 184. den Punkt x, welche jener schiefliegenden Ebene, und der Oberfläche des Berges gemein sind; und schlägt man in gleichen Entfernungen z. B. von zwey zu zwey Klafter in der Geraden x y von x anfangend Pflöcke, und bemerket auf jeden den Fall der Ebene auf seine Entfernung, so bestimmt man 2tens die Durchschnitte der Ebene und des Berges, wenn man aus was immer für einen Punkt 1 die Senkrechte 1 e auf x y errichtet, und den Punkt e gleichhoch mit 1 in der Ebene macht, indem man nach Nro. 182. einen Punkt e in der Senkrechten 1 e suchet der um 20″ tiefer als x ist.

Sind die Gränzen, f, g, h, k &c. jener schiefliegenden Ebene ebenso wie e bestimmt, so theilt man 3tens die ganze Figur in Dreyecke ein, wie im vorigen Fall; so ist der ganze Erdkörper in lauter dreyseitige rechte auf beeden Seiten schief abgeschnittene Prismen eingetheilt, und nivellirt man 4tens die Punkte m, n, o, p, q mit x nimmt das Ganze auf, so giebt der Aufnahm die Senkrechten Schnitte, und die Seiten der Prismen findet man, wenn man aus allen Punkten m, n, o, p, q, die Senkrechten auf x y errichtet, und die Tiefen der Durchschnitspunkte der Senkrechten n 2 m 3 &c. und der Geraden x y in der Ebene unter x zu den Höhenunterscheide der Punkten m, n &c. und x addirt, wenn die Punkte m, n, höher als x, und abzieht, wenn sie tiefer als x sind.

Ist z. B. n, 27′ höher als x und
m, 3′ tiefer als x,

so wird für den ersten Fall die Höhe des Punktes n über die Ebene $= 24'' + 27' = 29'$ seyn, und für den 2ten Fall der Punkt m über der Ebene $= 60'' - 3' = 2'$.

Wird dieser Unterscheid verneinend, so liegen die Punkte unter der Ebene, und diese Prismen müßten angeschüttet, und von der zu ver[illegible]enden Erde abgezogen werden.

Ist z. B. m, 11′ tiefer als x, so wird $60'' - 11' = - 6'$ also der Punkt m 6′ unter der Ebene seyn.

Sind die Seiten der Prismen gefunden, so werden die Inhalte berechnet und zusammen addirt.

Fig. 472. Soll jene schiefliegende Ebene d, e, f, g, h, k nach der Geraden m n, einen, und nach der Geraden p q einen andern gegebenen Fall haben, z. B. nach m n auf eine Klafter 3″ und nach p q auf eine Klafter 2″, und man nimmt in einer beliebigen Entfernung der Geraden m n von A z. B. von 20° den Punkt b an, so ist er in der schiefliegenden Ebene, um 60″ tiefer als A; sucht man nun auch in der Geraden p q durch den Fall dieser Geraden einem Punkt c der in der schiefliegenden Ebene gleichhoch mit b ist, so ist die Gerade b c horizontal, also alle

Punkte

Punkte dieser Geraden b c gleichhoch, den Punkt c findet man, wenn man sagt es verhält sich der Fall für eine Klaster der Geraden p q zu einer Klaster wie der Höhenunterscheid von A und b zu der Entfernung A c des gleichhohen Punktes c der Ebene in der Geraden p q oder

$$2'' : 1^\circ = 60'' : 30^\circ.$$

Und zieht man aus A auf b c die Senkrechte x y, so wird sie auch senkrecht auf alle gleichlaufenden mit b c in der Ebene seyn, alle Punkte jeder dieser gleichlaufenden, werden mit dem Durchschnittspunkt der Senkrechten x y gleichhoch seyn, folglich in der Ebene liegen.

Dividirt man endlich den Höhenunterscheid von A und b durch die Entfernung A o so ist der Quotient, der Fall der Ebene nach der Geraden x y auf eine Klaster.

Da nun der Fall welchen die Ebene nach der Geraden x y haben soll, bestimmt ist, so kann man übrigens, wie in vorhergehender Aufgab verfahren.

Ebenso wird durch drey gegebene Punkte eine Ebene geführt.

Oder sind zween Punkte, und mehrere vorliegende Anhöhen gegeben, so kann eine von diesen Anhöhen bestimmt werden, so, daß die Ebene, die durch die zween gegebenen Punkte und diese Anhöhe geführt, über alle andern weggeht.

Ist nur ein Punkt gegeben, so werden zwey Anhöhen, bestimmt, daß wieder die Ebene durch den Punkt, und die zwey Anhöhen geführt über alle andern weggeht.

Nach vorigen findet man auch die Durchschnitte einer schiefliegenden Ebene, in die sich ein Damm verschneiden soll.

Ebenso geht man zu Werke, wenn man bis auf eine gegebene horizontale oder schiefliegende Ebene, Erdkörper ausheben, oder über der Oberfläche des Erdreichs aufthürmen, oder endlich Vertiefungen mit Erde anfüllen, und ihre Inhalte berechnen soll.

Von

Von der arithmetischen Progression.

191.

Die arithmetische Progression ist eine Reihe Zahlen, die immer um gleichviel wachsen oder abnehmen.

So sind folgende Reihen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ꝛc.
5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, ꝛc.
35, 30, 25, 20, 15, 10, 5, 0, — 5, — 10 — 15, ꝛc.
9, 5, 1, — 3, — 7, — 11, — 15, — 19, — 23 ꝛc.

arithmetische Progressionen. Denn die 1te Reihe wächst immer um 1, die 2te, um 3, die 3te nimmt ab um 5, und die 4te um 4.

Jene Zahl, welche anzeigt, um wieviel die Glieder der Progression wachsen oder abnehmen, wird der **Unterscheid** der Progression genennet. So ist 1 der Unterscheid der 1ten, 3 jener der Zwoten, 5 jener der 3ten, und 4 jener der 4ten Progression.

Schreibt man über die Glieder einer Progression die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ꝛc. wie im folgenden Beyspiele:

$$\overset{1}{10},\ \overset{2}{16},\ \overset{3}{22},\ \overset{4}{28},\ \overset{5}{34},\ \overset{6}{40},\ \overset{7}{46},\ \overset{8}{52},\ \overset{9}{58},\ \overset{10}{64},\ \overset{11}{70}$$

um anzuzeigen, das wievielte Glied jedes sey; so heissen diese natürlichen Zahlen die **Zeiger** der Progression, und der letzte Zeiger die **Anzahl der Glieder.**

192. Addiret man den Unterscheid der Progression zu was immer für einem Gliede derselben: so erhält man das nächstgrößere, wenn er bejahend, und das nächstkleinere, wenn er verneinend ist. Sobald also ein Glied der

Pro-

Progression nebst ihrem Unterscheide bekannt ist; so können auch gar leicht alle andern Glieder derselben nach und nach ausfindig gemacht werden.

Es sey das 1te Glied 7, und der Unterscheid 2; so ist die Progression

$$\overset{1}{7}, \overset{2}{9}, \overset{3}{11}, \overset{4}{13}, \overset{5}{15}, \overset{6}{17}, \overset{7}{19}, \overset{8}{21}, \overset{9}{23}, \overset{10}{25}, \overset{11}{27},$$

Es sey der Unterscheid — 2, und das 1te Glied 7; so ist die Progression

$$\overset{1}{7}, \overset{2}{5}, \overset{3}{3}, \overset{4}{1}, \overset{5}{-1}, \overset{6}{-3}, \overset{7}{-5}, \overset{8}{-7}, \overset{9}{-9}, \overset{10}{-11}, \overset{11}{-13}$$

Es sey endlich allgemein das 1te Glied a, und der Unterscheid d; so ist die Progression

$$\overset{1}{a}, \overset{2}{a+d}, \overset{3}{a+2d}, \overset{4}{a+3d}, \overset{5}{a+4d}, \overset{6}{a+5d},$$
$$\overset{7}{a+6d}, \overset{8}{a+7d}, \overset{9}{a+8d}, \overset{10}{a+9d}, \ldots$$
$$\ldots \overset{20}{a+19d}, \ldots \overset{100}{a+99d}, \ldots \overset{n}{a+(n-1)d}.$$

Also ist jedes Glied gleich dem 1ten Gliede mehr dem Producte aus dem Unterscheide in den nächstkleinern Zeiger: oder wenn das nte Glied z heißt; so ist $z = a + (n-1)d$.

193. Da wir nun zwischen diesen vier Größen a dem 1ten Gliede, d dem Unterscheide, z dem letzten Gliede, und n der Anzahl der Glieder, eine Gleichung von 1ten Grade

$$z = a + (n-1)d$$

haben; so kann, wenn drey derselben gegeben sind, allemal auch die vierte gefunden werden.

Einer kaufte 30 Pferde, das 1te um 7, das 2te um 13, das 3te um 19 Dukaten und jedes der folgenden um 6 Dukaten mehr. Wie hoch kam ihm das letzte zu stehen? Die Werthe der Pferde machen eine arithmetische Progression aus, deren 1tes Glied $a = 7$, der Unterscheid $d = 6$ und die Anzahl der Glieder $n = 30$ ist; Daher ist der Werth des letzten $z = a + (n-1)d = 7 + 29 \times 6 = 7 + 174 = 181$ Dukaten.

Su-

Suche eine arithmetische Progression von 15 Gliedern, deren das erste 5, und das letzte 10 ist.

Weil $a = 5$, $z = 10$ und $n = 15$ ist; so wird

$$10 = 5 + 14d, \text{ folglich}$$
$$14d = 10 - 5 = 5$$
$$d = \frac{5}{14}, \text{ also die Progression}$$

$$\overset{1}{5},\ \overset{2}{5\tfrac{5}{14}},\ \overset{3}{5\tfrac{5}{7}},\ \overset{4}{6\tfrac{1}{14}},\ \overset{5}{6\tfrac{3}{7}},\ \overset{6}{6\tfrac{11}{14}},\ \overset{7}{7\tfrac{1}{7}},\ \overset{8}{7\tfrac{1}{2}},\ \overset{9}{7\tfrac{6}{7}},$$
$$\overset{10}{8\tfrac{3}{14}},\ \overset{11}{8\tfrac{4}{7}},\ \overset{12}{8\tfrac{13}{14}},\ \overset{13}{9\tfrac{2}{7}},\ \overset{14}{9\tfrac{9}{14}},\ \overset{15}{10}$$

Wieviel Glieder hat die Progression, deren 1tes Glied -7, der Unterscheid $\frac{1}{2}$ und das letzte Glied 3 ist?

Weil $a = -7$, $d = \frac{1}{2}$, und $z = 3$ ist; so wird

$$3 = -7 + (n-1) \times \frac{1}{2}$$
$$3 = -7 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$
$$\frac{n}{2} = 3 + 7 + \frac{1}{2}$$
$$n = 6 + 14 + 1$$
$$n = 21;$$

folglich hat die Progression 21 Glieder.

194. Weil in jeder arithmetischen Progression

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \overset{4}{a+3d},\ \overset{5}{a+4d},\ \overset{6}{a+5d},\ \overset{7}{a+6d},$$
$$\overset{8}{a+7d},\ \overset{9}{a+8d},\ \overset{10}{a+9d},\ \overset{11}{a+10d},\ \ldots\ \overset{n}{a+(n-1)d}$$

jedes Glied einen Unterscheid d mehr enthält, als das unmittelbar vorhergehende; so folgt:

1tens daß das 1te Glied weniger dem 2ten gleich dem 2ten weniger dem 3ten, gleich dem 3ten weniger dem 4ten, gleich dem 4ten weniger dem 5ten 2c., also, daß eine arithmetische Progression nichts anders ist, als eine fortgesetzte stete arithmetische Proportion, oder eine stete arithmetische Pro-

Proportion nichts anders, als eine arithmetische Progression, die nur aus dreyen Gliedern besteht.

2tens daß jedes Glied die mittlere arithmetischproportionirte zwischen jedeu zwey andern Gliedern ist, die gleichweit von jenem abstehen. Denn um wieviel d das eine von diesen kleiner ist, als jenes, um ebensoviel d ist das andere größer.

3tens daß jede zwey Glieder mit jeden zwey andern, die eben soweit, als jene voneinander entfernt sind, in einer arithmetischen Proportion stehen. Denn, um wieviel d immer jene voneinander unterschieden sind, um ebensoviel d sind es auch diese: und umgekehrt, daß die zwey ersten Glieder einer arithmetischen Proportion in der arithmetischen Progression, von der sie auch Glieder sind, immer ebensoweit von einander abstehen, als die zwey letzten, weil diese allemal um ebensoviel d als jene voneinander unterschieden sind.

4tens endlich, daß die Summe jeder zwey Glieder, welche gleichweit von beyden äussern abstehen, allemal der Summe der äussern gleich ist. Denn, um wieviel d ein mittleres größer ist, als ein äusseres, um ebensoviel d ist das andere mittlere kleiner, als das andere äussere.

195. Es geben also in jeder arithmetischen Progression, das erste und letzte Glied, das zweyte und vorletzte, das dritte und drittletzte, das vierte und viertletzte, und so fort, immer einerley Summen. Folglich wird man die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression erhalten, wenn man die Summe der äussern so oft nimmt, als die Progression Paare der Glieder enthält, oder wenn man die Summe der äussern Gliedern mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt.

Es sey die Summe aller Glieder folgender Progression

$$\overset{1}{a}, + \overset{2}{(a + d)} + \overset{3}{(a + 2d)} + \overset{4}{(a + 3d)}$$

gleich S; so ist

$S = \overset{1}{a}$

$$S = \overset{1}{a} + (\overset{2}{a+d}) + (\overset{3}{a+2d}) + (\overset{4}{a+3d}) \text{ und}$$
$$S = \overset{4}{a+3d} + (\overset{3}{a+2d}) + (\overset{2}{a+d}) + \overset{1}{a} \text{ also}$$

$$2S = (2a+3d)+(2a+3d)+(2a+3d)+(2a+3d)$$
$$2S = (2a+3d) \times 4 \text{ und}$$
$$S = (2a+3d) \times \tfrac{4}{2}.$$

196. Wenn also S die Summe aller Glieder jeder Progression, z das letzte Glied, a das erste Glied, und n die Anzahl der Glieder bedeutet; so ist

$$S = \frac{(a+z)\,n}{2}$$

wieder eine Gleichung von vier Größen, woraus sich jede finden läßt, so bald die drey übrigen bekannt sind.

Wie oft schlägt der Hammer in 12 Stunden auf die Glocke?

Ohne die Viertel machen die Streiche eine arithmetische Progression aus, deren 1tes Glied $a = 1$, das letzte $z = 12$, die Anzahl der Glieder $n = 12$, alle Streiche aber, oder die Summe aller Glieder $S = (a+z)\,\frac{n}{2}$ $= 13 \times 6 = 78$.

Mit den Vierteln ist $a = 11$, $n = 12$, und $z = 22$, also $S = (11+22) \times 6 = 33 \times 6 = 198$.

Einer kauft verschiedene Sorten Tücher: das erste Stück ist das wohlfeilste, für die folgenden zahlt er immer um gleich viel mehr: um das erste giebt er 19, um das letzte 91, und um alle insgesamt 715 Gulden. Wie viel sind es Stücke?

Weil die Preise der Stücke in einer arithmetischen Progression stehen, die ebensoviel Glieder hat, als Stücke sind; so kömmt es blos darauf an, daß wir die Anzahl der Glieder n dieser Progression finden.

Es ist also $a = 19$, $z = 91$, $S = 715$,

folglich $715 = (19 + 91)\frac{n}{2}$

$$715 = 110 \times \frac{n}{2}$$

$$715 = 55n$$

$$n = \frac{715}{55} = \frac{143}{11} = 13$$

Suche das 1te Glied einer arithmetischen Progression, die aus 91 Gliedern besteht, deren letztes Glied 537, und die Summe aller Glieder 29757 ausmacht.

Es ist also $29757 = \frac{(a + 537) \times 91}{2}$, folglich

$$59514 = (a + 537) \times 91$$

$$\frac{59514}{91} = a + 537$$

$$a = \frac{59514}{91} - 537$$

$$a = 654 - 537 = 117.$$

Es sind 264 fl. 17 kr. unter 101 Mann so auszutheilen, daß der 1te 7 kr., und jeder der folgenden immer um gleichviel mehr, als der nächstvorhergehende bekomme. Wieviel bekömmt der letzte?

Diese Geschenke machen eine arithmethische Progression aus, worinn $a = 7$ kr., $S = 264$ fl. 17 kr. $= 15857$ kr., $n = 101$, und z das letzte Geschenk ist;

folglich ist $15857 = \frac{(7 + z)\,101}{2}$

$$31714 = (7 + z) \times 101$$

$$7 + z = \frac{31714}{101}$$

$$z = \frac{31714}{101} - 7$$

$z = 314 - 7 = 307$ kr. $= 5$ fl. 7 kr.

197.

197. Weil bey jeder arithmetischen Progression diese zwo Gleichungen

$$z = a + (n - 1)d$$

$$S = \frac{(a + z)n}{2}$$

statt finden; so können, da drey aus diesen 5 Größen a, d, z, n, S bekannt sind, allemal auch die zwo übrigen gefunden werden.

Denn sind die drey Bekannten in einer Gleichung enthalten; so findet man daraus eine, und sodann ebenso aus der andern Gleichung auch die andere Unbekannte: und sind die drey Bekannten in keiner dieser zwo Gleichungen beysammen; so kann man doch daraus eine Gleichung herleiten, die nur eine Unbekannte enthält, und wieder nach bekannter Methode beede Unbekannten finden.

Ich habe 1770 Pfund Pulver in Fässern; in dem kleinsten 60 Pfund, und in den übrigen immer um 3 Pfund mehr. Wieviel Fässer sind es, und wieviel hält das größte Faß?

Es machen die Pfunde Pulver, die in diesen Fässern enthalten sind, eine arithmetische Progression aus, wovon das 1te Glied a = 60, der Unterscheid d = 3, und die Summe aller Glieder S = 1770 ist. Daher wird

$$z = 60 + (n - 1) \times 3 \text{ und}$$

$$1770 = \frac{(60 + z)n}{2}; \text{ aus dieser ist}$$

$$\frac{3540}{n} = 60 + z$$

$$z = \frac{3540}{n} - 60, \text{ also}$$

$$60 + (n - 1) \times 3 = \frac{3540}{n} - 60$$

$$120 + 3n - 3 = \frac{3540}{n}$$

$$120n + 3nn - 3n = 3540$$
$$3nn = 3n - 120n + 3540$$
$$nn = n - 40n + 1180$$
$$nn = -39n + 1180$$
$$n = -\frac{39}{2} \pm \sqrt{\frac{1521}{4} + 1180}$$
$$n = -\frac{39}{2} \pm \sqrt{\frac{1521 + 4720}{4}}$$
$$n = -\frac{39}{2} \pm \sqrt{\frac{6241}{4}}$$
$$n = -\frac{39}{2} + \frac{79}{2}$$
$$n = \frac{40}{2} = 20 \text{ und}$$
$$z = 60 + 19 \times 3 = 60 + 57 = 117.$$

Es sind also 20 Fässer, und das größte hält 117 Pfund.

Es kosten 13 Steine $158\frac{1}{6}$ Dukaten, und immer einer um $\frac{3}{4}$ Dukaten mehr als der andere. Wieviel kostet der geringste, und wieviel der beste?

Diese Preise stehen in einer arithmetischen Progression, worinn der Unterscheid $d = \frac{3}{4}$, die Anzahl der Glieder $n = 13$, und die Summe aller Glieder $S = 158\frac{1}{6}$ ist. Daher wird

$$z = a + 12 \times \frac{3}{4} \text{ und}$$
$$158\frac{1}{6} = \frac{(a + z) \times 13}{2}; \text{ aus dieser ist}$$
$$316\frac{1}{3} = (a + z) \times 13$$
$$\frac{949}{3} = (a + z) \times 13$$
$$\frac{949}{39} = a + z$$
$$z = \frac{949}{39} - a, \text{ also}$$

$$\frac{949}{39} - a = a + 12 \times \frac{3}{4}$$

$$2a = \frac{949}{39} - 9$$

$$2a = \frac{949 - 351}{39} = \frac{598}{39}$$

$$a = \frac{299}{39} = 7\tfrac{2}{3}, \text{ und}$$

$$z = 7\tfrac{2}{3} + 9 = 16\tfrac{2}{3}$$

Also kostet der geringste $7\frac{2}{3}$, und der beste $16\frac{2}{3}$ Dukaten.

Einer kaufte mehrere Stücke Tuch um $995\frac{1}{2}$ fl. Er gab um eines immer 12 fl. mehr, als um das vorige, und um das letzte $150\frac{1}{2}$ fl. Wieviel Stücke waren es, und wie theuer kam ihn das 1te zu stehen.

Diese Preise machen eine arithmetische Progression aus, worinn der Unterscheid $d = 12$, das letzte Glied $z = 150\frac{1}{2}$, und die Summe aller Glieder $S = 995\frac{1}{2}$ ist; daher wird

$$150\tfrac{1}{2} = a + (n - 1) \times 12 \text{ und}$$

$$995\tfrac{1}{2} = (a + 150\tfrac{1}{2}) \times \frac{n}{2}, \text{ folglich aus der ersten}$$

$$a = 150\tfrac{1}{2} - (n - 1) \times 12, \text{ und aus der zwoten}$$

$$a = \frac{1991}{n} - 150\tfrac{1}{2}, \text{ also}$$

$$150\tfrac{1}{2} - (n - 1) \times 12 = \frac{1991}{n} - 150\tfrac{1}{2}$$

$$301 - 12n + 12 = \frac{1991}{n}$$

$$313 - 12n = \frac{1991}{n}$$

$$313n - 12nn = 1991$$

$$12nn = 313n - 1991$$

$$nn = \frac{313n}{12} - \frac{1991}{12}$$

n

$$n = \frac{313}{24} \pm \sqrt{\frac{97969}{576} - \frac{95568}{576}}$$

$$n = \frac{313}{24} \pm \sqrt{\frac{2401}{576}}$$

$$n = \frac{313}{24} \pm \frac{49}{24}$$

$$n = \frac{362}{24} = 15\tfrac{1}{12}:$$ oder, da dieses nicht seyn kann, weil man von ganzen Stücken redet; so ist

$$n = \frac{313 - 49}{24} = \frac{264}{24} = 11 \text{ und}$$

$$a = 150\tfrac{1}{2} - 12(n-1) = 150\tfrac{1}{2} - 120 = 30\tfrac{1}{2}\text{ fl.}$$

Es sind also 11 Stücke, und das 1te kostet $30\frac{1}{2}$ fl.

Von der geometrischen Progression.

198.

Die geometrische Progression ist eine Reihe Zahlen, die um gleichvielmal wachsen oder abnehmen.

Jene Zahl, welche anzeigt, um wievielmal die Glieder grösser oder kleiner werden, heißt **Nenner** der Progression; und jene Zahlen, welche über die Glieder der Progression geschrieben werden, um anzuzeigen, das wievielste Glied jedes sey, werden **Zeiger** genennt.

Es sey das erste Glied 5, und der Nenner 3; so ist die Progression

$$\overset{1}{5},\ \overset{2}{15},\ \overset{3}{45},\ \overset{4}{135},\ \overset{5}{405},\ \overset{6}{1215},\ \overset{7}{3645},\ \overset{8}{10935}.\ \text{rc.}:$$

Und

Und ist das erste Glied 10935 und der Nenner $\frac{1}{3}$; so ist die Progression:

1	2	3	4	5	6	7	8	
10935,	3645,	1215,	405,	135,	45,	15,	5.	ꝛc.:

Es sey allgemein das erste Glied der Progression a und der Nenner derselben b; so ist die Progression

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{ab^1},\ \overset{3}{ab^2},\ \overset{4}{ab^3},\ \overset{5}{ab^4},\ \overset{6}{ab^5},\ \overset{7}{ab^6},\ \overset{8}{ab^7},\ \overset{9}{ab^8},\ \overset{10}{ab^9},\ \overset{11}{ab^{10}},\ \overset{12}{ab^{11}},\ \overset{13}{ab^{12}},$$
$$\overset{14}{ab^{13}},\ \ldots\ldots\ \overset{n}{ab^{n-1}}$$

Folglich ist das nte oder jedes Glied der Progression gleich dem Producte aus dem ersten Gliede a in jene Potenz des Nenners b, deren Exponent n—1 um 1 kleiner ist, als des Gliedes Zeiger n.

Es sey das erste Glied 30 und der Nenner 2; so ist
das 6te Glied $= 30 \times 2^5 = 30 \times 32 = 960$
das 10te Glied $= 30 \times 2^9 = 30 \times 512 = 15360$
das 19te Glied $= 30 \times 2^{18} = 30 \times 262144 = 7864320$

199. Es sey ab^p was immer für ein Glied einer geometrischen Progression; so bedeuten ab^{p-q} und ab^{p+q} jede zwey Glieder, die in der Progression gleichweit von jenem abstehen. Es verhält sich aber

$$ab^{p-q} : ab^p = ab^p : ab^{p+q}.$$

Daher ist jedes Glied einer geometrischen Progression allemal die mittlere geometrischproportionirte zwischen jeden zwey Gliedern, die in der Progression gleichweit von jenem entfernt sind.

Und ist $x : y = y : u$, und
$$x = ab^{p-q}$$
$$y = ab^p;\ \text{so ist}$$
$$ab^{p-q} : ab^p = ab^p : u,\ \text{also}$$
$$u = ab^{p+p-p+q} = ab^{p+q}.$$

Wenn

Wenn daher die drey Grössen einer steten geometrischen Proportion Glieder von einer geometrischen Progression sind; so sind die beeden äussern in der Progression auch allemal gleichweit von den mittlern entfernt.

200. Es seyen ab^p und ab^{p+q} was immer für zwey Glieder einer geometrischen Progression; so sind ab^m und ab^{m+q} was immer für zwey andere, die ebensoweit als jene voneinander abstehen.

Es verhält sich aber $ab^p : ab^{p+q} = ab^m : ab^{m+q}$.

Daher stehen jede zwey Glieder einer geometrischen Progression im geraden Verhältnisse mit jeden zwey andern, die in der Progression ebensoweit, als jene voneinander abstehen.

Und ist $x : y = u : z$, und

$$x = ab^p$$
$$y = ab^{p+q}$$
$$u = ab^m; \text{ so ist}$$
$$ab^p : ab^{p+q} = ab^m : z, \text{ also}$$
$$z = ab^{p+q+m-p} = ab^{m+q}.$$

Wenn daher die vier Grössen einer geometrischen Proportion Glieder von einer geometrischen Progression sind; so stehen die zwo letztern in der Progression auch allemal ebensoweit von einander ab, als die zwo erstern.

201. Weil das mittlere Glied in einer Progression von einer ungeraden Anzahl Glieder von den beyden äussern gleichweit entfernt ist; so ist es auch allemal die mittlere geometrischproportionirte zwischen ebendenselben, folglich das Quadrat von jenem gleich dem Producte aus diesen.

202. Wenn zwey Glieder einer geometrischen Progression gleichweit von beyden äussern entfernt sind, so ist auch das 2te aus diesen vieren ebenso weit vom ersten, als das 4te vom 3ten entfernt; also stehen sie in einer geometrischen Proportion. Daher ist das Product jeder zwey Glieder, die gleichweit von beyden äussern abstehen, allemal gleich dem Producte beyder äussern, folglich auch gleich dem Produkte aus was immer für zweyen andern Gliedern, die wieder gleichweit von beyden äussern abstehen.

203. Weil in jeder geometrischen Progression das 1te Glied zum 2ten wie das 2te zum 3ten, wie das 3te zum 4ten, wie das 4te zum 5ten ist, und so fort; so ist das Verhältniß des 1ten Gliedes a zum nten Gliede ab^{n-1} aus $n-1$ gleichen Verhältnissen zusammengesetzt, also gleich dem Verhältnisse der $(n-1)$ten Potenz des ersten zu der $(n-1)$ten Potenz des 2ten Gliedes, oder gleich dem Verhältnisse der $(n-1)$ten Potenz eines jeden Gliedes zu der $(n-1)$ten Potenz des darauf folgenden.

Oder es verhält sich

$$a : ab^{n-1} = (ab^p)^{n-1} : (ab^{p+1})^{n-1}.$$

204. Weil die Verhältnisse

$$\begin{array}{rcl} a & : & ab \\ ab & : & ab^2 \\ ab^2 & : & ab^3 \\ ab^3 & : & ab^4 \\ ab^4 & : & ab^5 \\ ab^{n-2} & : & ab^{n-1} \end{array}$$

einander gleich sind, und bey gleichen Verhältnissen die Summe aller Vorsätze zur Summe aller Nach-

sätze

sätze sich verhält, wie jeder Vorsatz zu seinem Nachsatze; so verhält sich die Summe aller Glieder einer geometrischen Progreßion weniger das letzte, zu der Summe aller Glieder weniger das erste, wie das erste Glied zu dem zweyten, oder wie jedes Glied zu dem unmittelbar folgenden.

205. Es sey das 1te Glied a, der Nenner b, das letzte Glied z, die Anzahl der Glieder oder der Zeiger des letzten Gliedes n, und die Summe aller Glieder s

so ist $z = ab^{n-1}$ und

$$s - z : s - a = a : ab$$

$$s - z : s - a = 1 : b, \text{ also}$$

$$bs - bz = s - a$$

$$bs - s = bz - a$$

$$s = \frac{bz - a}{b - 1} \text{ oder, weil } z = ab^{n-1}$$

$$s = \frac{ab^n - a}{b - 1}$$

206. Ebendiese Gleichung für s kann auch, wie folgt, gefunden werden. Es sey

$$s = \overset{1}{a} + \overset{2}{ab} + \overset{3}{ab^2} + \overset{4}{ab^3} + \overset{5}{ab^4} + \overset{6}{ab^5} + \ldots \overset{n}{ab^{n-1}};$$

so ist auch

$$bs = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + ab^6 + \ldots ab^n$$

Zieht man itzt die obere Gleichung von der untern ab; so hebt jedes Glied der obern Progreßion das nächstvorhergehende der untern auf: nur das 1te der obern, und das letzte der untern bleiben unaufgehoben. Daher ist

$$bs - s = ab^n - a; \text{ folglich}$$

$$s = \frac{ab^n - a}{b - 1} \text{ oder, weil } z = ab^{n-1}$$

$$s = \frac{bz - a}{b - 1}, \text{ wie zuvor.}$$

207. Weil $z = ab^{n-1}$; so ist auch

$$a = \frac{z}{b^{n-1}}, \text{ und}$$

$$b^{n-1} = \frac{z}{a}, \text{ also}$$

$$b = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}.$$

Wir können also aus dieser Gleichung $z = ab^{n-1}$ jedesmal z oder a finden, sobald die 3 übrigen Stücke bekannt sind, nicht aber b, weil wir noch keine Wurzel ausser die 2te ausziehen können, auch nicht n, weil wir noch nicht gelernet haben, wie eine Gleichung aufzulösen sey, worinn die Unbekannte der Exponent einer Potenz oder Wurzel ist.

Das erste Glied einer geometrischen Progression von 15 Gliedern sey 6 und der Nenner derselben 3; so ist das letzte Glied

$$z = 6 \times 3^{14}$$
$$z = 6 \times 4782969$$
$$z = 28697814.$$

Und ist das 15 Glied 28697814 und der Nenner 3; so ist das erste Glied $a = \frac{28697814}{3^{14}}$

$$a = \frac{28697814}{4782969}$$
$$a = 6.$$

208. Weil $S = \frac{bz - a}{b - 1}$; so ist auch

$$bs - s = bz - a$$
$$a = bz - bs + s \text{ oder}$$
$$a = bz - (b-1)s \text{ und}$$
$$bz = a + (b-1)s$$

$$z = \frac{a+(b-1)s}{b}$$

$$bs - bz = s - a \text{ und}$$

$$b = \frac{s-a}{s-z},$$

Wenn daher 3 von diesen 4 Größen a, b, z, und S gegeben sind; so läßt sich allemal auch die vierte finden.

Es sey das 1te Glied einer geometrischen Progression $= 1$, der Nenner $= 3$, und die Summe aller Glieder $= 3280$. Man soll das letzte Glied finden.

Weil $S = \frac{bz-a}{b-1}$; so ist

$$3280 = \frac{3z-1}{2}$$

$$6560 = 3z - 1$$

$$3z = 6561$$

$$z = 2187.$$

Es sey das 1te Glied 4, das letzte $68\frac{11}{32}$, und die Summe aller Glieder $197\frac{1}{32}$. Man soll den Nenner finden.

Weil $S = \frac{bz-a}{b-1}$; so ist

$$197\frac{1}{32} = \frac{68\frac{11}{32}\times b - 4}{b-1}$$

$$6305 = \frac{2187b - 128}{b-1}.$$

$$6305b - 6305 = 2187b - 128$$

$$6305b - 2187b = 6305 - 128$$

$$4118b = 6177$$

$$b = \frac{6177}{4118}$$

$$b = \frac{3}{2}.$$

Es

Es sey der Nenner 2, das letzte Glied 384, und die Summe aller Glieder 765. Man soll das erste Glied finden.

Weil $S = \frac{bz - a}{b - 1}$; so ist

$$765 = \frac{384 \times 2 - a}{2 - 1}$$
$$765 = 768 - a$$
$$a = 768 - 765$$
$$a = 3.$$

Einer will sein Pferd nach den Hufnägeln verkaufen, und fordert für den ersten Nagel 1 Pfenning, für den 2ten 2 Pfenning, für den 3ten 4 Pfenning, für den 4ten 8 Pfenning, und für jedenfolgenden immer 2mal soviel, als für den vorhergehenden. Man fragt, wie theuer das Pferd zu stehen käme, wenn es 32 Hufnägel hätte?

Der Preis dieses Pferdes ist also die Summe der 32 Glieder einer geometrischen Progression, deren erstes Glied 1 Pfenning und der Nenner 2 ist.

Daher weil $S = \frac{bz - a}{b - 1}$ oder

$S = \frac{ab^n - a}{b - 1}$; so ist hier

$$S = 2^{32} - 1$$

Es ist aber $2^{18} = 262144$
$2^9 = 512$, also

$$\begin{array}{r} 524288 \\ 262144 \\ \hline 1310720 \end{array}$$

$2^{27} = 134217728$ und
$2^5 = 32$, also

$$\begin{array}{r} 268435456 \\ 402653184 \\ \hline \end{array}$$

$2^{32} = 4294967296$, folglich

S

$S = 4294967295$ Pfenning
$S = 1073741823\frac{3}{4}$ kr.
$S = 17895697$ fl. $3\frac{3}{4}$ kr.

209. Wenn der Nenner einer Progression b ein Bruch, oder kleiner als 1 ist; so werden die Glieder derselben immer kleiner und nehmen, da die Progression bis ins Unendliche geht, über alle in sich bestimmte Schranken ab. Es wird also in solchem Falle $z = 0$, und

$$S = \frac{bz - a}{b - 1} = \frac{0 - a}{b - 1} = \frac{-a}{b - 1} \text{ oder}$$

$$S = \frac{a}{1 - b}$$

$$a = S - bs \text{ und}$$

$$bs = S - a$$

$$b = \frac{S - a}{S}.$$

Wenn daher zwo von diesen drey Grössen a, b, und S einer bis ins unendliche abnehmenden Progression gegeben sind; so läßt sich auch allemal die 3te finden.

Es sey von einer bis ins Unendliche abnehmenden Progression, das erste Glied 8, und der Nenner $\frac{1}{4}$; so ist

$$S = \frac{8}{1 - \frac{1}{4}} = 8 : \frac{3}{4} = \frac{32}{3} = 10\,\frac{2}{3}$$

Es sey die Summe aller Glieder 15 und der Nenner $\frac{2}{3}$; so ist

$$15 = \frac{a}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$15 = a : \frac{1}{3}$$

$$15 = 3a$$

$$a = 5.$$

Es

Es sey das Erste Glied 12 und die Summe aller Glieder 30; so ist

$$30 = \frac{12}{1-b}$$
$$30 - 30b = 12$$
$$30b = 30 - 12$$
$$b = \frac{30-12}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

210. Wenn bey einer bis ins Unendliche abnehmenden Progression, die Glieder wechselsweise bejahend und verneinend werden; so ist die Summe aller Glieder

$$S = a - ab + ab^2 - ab^3 + ab^4 - ab^5 + ab^6 - ab^7 + ab^8 \text{ ic.}$$
$$bs = ab - ab^2 + ab^3 - ab^4 + ab^5 - ab^6 + ab^7 - ab^8 + ab^9 \text{ ic.}$$

Addirt man nun beede Gleichungen; so hebt jedes Glied der obern Progression das nächstvorhergehende der untern ohne Ende fort auf; folglich wird

$$S + bs = a$$
$$S = \frac{a}{1+b} \text{ und}$$
$$b = \frac{a-S}{S}.$$

Es sey in einer solchen Progression das erste Glied 10 und der Nenner $\frac{3}{5}$; so ist

$$S = \frac{10}{1+\frac{3}{5}} = 10 : \frac{8}{5} = \frac{50}{8} = 6\frac{1}{4}.$$

Es sey die Summe aller Glieder 15 und der Nenner $\frac{3}{4}$; so ist

$$15 = \frac{a}{1+\frac{3}{4}} = a : \frac{7}{4} = \frac{4a}{7}, \text{ also}$$
$$4a = 105$$
$$a = 26\frac{1}{4}.$$

Es

Es sey die Summe aller Glieder 12 und das erste Glied 15;

$$\text{so ist } 12 = \frac{15}{1+b}$$

$$12 + 12b = 15$$

$$12b = 3$$

$$b = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Von den Logarithmen.

211.

Es sey eine geometrische und eine arithmetische Progression Glied vor Glied unter einander geschrieben;

$$\frac{a}{b^3},\ \frac{a}{b^2},\ \frac{a}{b},\ a,\ ab,\ ab^2,\ ab^3,\ ab^4,$$

$$c-3d, c-2d, c-d, c, c+d, c+2d, c+3d, c+4d,$$

so heissen die Glieder der arithmetischen Progression Logarithmen, und die Glieder der geometrischen Progression Zahlen dieser Logarithmen.

So ist $c + 3d$ der Logarithme von der Zahl ab^3, und $\frac{a}{b^3}$ die Zahl von dem Logarithme $c - 3d$.

212. Suchen wir zwischen jeden zwo Zahlen die mittlere geometrischproportionirte, und zwischen ihren Logarithmen die mittlere arithmetischproportionirte; so kommen folgende zwo Progressionen heraus.

$\frac{a}{b^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{a}{b^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{a}{b^{\frac{1}{2}}}, \; a, \; ab^{\frac{1}{2}}, \quad ab, \quad ab^{\frac{3}{2}},$$

$$c - \frac{3d}{2}, c - d, c - \frac{d}{2}, c, c + \frac{d}{2}, c + d, c + \frac{3d}{2},$$

Es mögen also die Logarithmen wie immer angenommen seyn; so können zwischen jeden zwo Zahlen und ihren Logarithmen nach dieser Methode noch unendlich viele Zahlen sammt ihren Logarithmen ausfindig gemacht werden.

213. Weil die Glieder der geometrischen Progression allzeit bejahend bleiben, die Glieder der arithmetischen aber, $c - d$, $c - 2d$, $c - 3d$ oder $c - nd$ verneinend werden, sobald d, $2d$, $3d$ oder nd größer wird, als c; so erhellet, daß die verneinenden sowohl, als die bejahenden Logarithmen allemal nur zu bejahenden Zahlen gehören können.

Folglich sind die Logarithmen der verneinenden Zahlen unmöglich.

214. Wenn 4 Zahlen in einer geometrischen Proportion stehen; so sind die zwo erstern in der geometrischen Progression ebensoweit voneinander entfernt, als die zwo leztern; also sind auch die Logarithmen der zwo erstern in der arithmetischen Progression ebensoweit voneinander entfernt, als die Logarithmen der zwo leztern; folglich stehen diese vier Logarithmen in einer arithmetischen Proportion.

Und wenn vier Logarithmen in einer arithmetischen Proportion stehen; so sind die zween erstern in der arithmetischen Progression ebensoweit voneinander entfernt, als die zween leztern; also sind auch die Zahlen der zween erstern in der geometrischen Progression ebensoweit voneinander entfernt, als die Zahlen der zween leztern; folglich stehen diese vier Zahlen in einer geometrischen Proportion.

Sobald daher vier Zahlen in einer geometrischen Proportion stehen; so stehen ihre Logarithmen in einer arithmetischen: und sobald vier Logarithmen in einer arithmetischen Proportion stehen; so stehen ihre Zahlen in einer geometrischen.

Oder verhält sich $m : n = p : q$; so ist auch

$$\text{Log. } m - \text{Log. } n = \text{Log. } p - \text{Log. } q:$$

und ist $\text{Log. } x - \text{Log } y = \text{Log. } z - \text{Log. } u$;

so verhält sich auch $x : y = z : u$.

215. Es sey $a = 1$ und $c = 0$; so werden die allgemeinen Progressionen in folgende verwandelt.

$$\frac{1}{b^4},\ \frac{1}{b^3},\ \frac{1}{b^2},\ \frac{1}{b},\ 1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5,$$

$$-4d, -3d, -2d, -d,\ 0,\ d,\ 2d,\ 3d,\ 4d,\ 5d.$$

216. Sobald also 0 der Logarithme der Zahl 1 ist; so gehören die bejahenden Logarithmen zu den bejahenden Zahlen, die grösser sind, als 1, und die verneinenden Logarithmen zu den bejahenden Zahlen, die kleiner sind, als 1.

217. Es verhält sich $1 : p = q : pq$; also ist

$$\text{Log. } 1 - \text{Log. } p = \text{Log. } q - \text{Log. } pq$$

$$\text{Log. } pq = \text{Log. } p + \text{Log. } q - \text{Log. } 1, \text{ also}$$

weil $\text{Log. } 1 = 0$,

$$\text{Log. } pq = \text{Log. } p + \text{Log. } q.$$

Folglich ist der Logarithme eines Products gleich der Summe der Logarithmen seiner Factoren.

218. Es sey $x = \frac{p}{q}$; so ist

$$p = qx, \text{ also}$$

$$\text{Log. } p = \text{Log. } q + \text{Log. } x$$

$$\text{Log. } x = \text{Log. } p - \text{Log. } q \text{ oder}$$

$$\text{Log. } \frac{p}{q} = \text{Log. } p - \text{Log. } q.$$

Folg=

Dieses sind die Logarithmen, wovon Herr Euler sagt, daß, wenn b eine beständige Grösse ist, und $b^q = c$; so sey q der Logarithme von der Zahl c. Denn, weil q der Logarithme ist von b^q; so ist auch q der Logarithme von c, sobald c gleich ist b^q.

222. Es sey endlich b = 10; so werden die vorigen Progressionen in folgende verwandelt.

$$10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5,$$
$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Oder

$$\frac{1}{100000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10, 100, 1000, 10000$$
$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.$$

So sind die Logarithmen für die Potenzen der Zahl 10 bestimmt, und nach dieser Bestimmung sodann auch die Logarithmen der übrigen Zahlen berechnet worden. Wir wollen sehen, wie diese Berechnung hat können bewerkstelliget werden.

223. Wenn man zwischen zwoen Zahlen die mittlere geometrischproportionirte und zwischen ihren Logarithmen die mittlere arithmetischproportionirte nimmt; so ist diese allemal der Logarithme von jener. Suchet man daher, um den Logarithme einer gegebenen Zahl zu finden, die mittlere geometrischproportionirte zwischen der nächstgrössern und der nächstkleinern aus jenen Zahlen, von denen die Logarithmen schon bekannt sind, und zwischen ihren Logarithmen die mittlere arithmetischproportionirte; so wird man die Logarithmen von Zahlen finden, die immer weniger von der gegeben unterschieden sind.

So ist, um den Logarithme von 2 zu finden,

1tens Log. $\sqrt{10 \times 1} = \frac{1+0}{2}$ oder

Log. $3.1622776601 = 0.5$,

2tens Log. $\sqrt{3.1622776601 \times 1} = \frac{0.5+0}{2}$ oder

Log. $1.7782794100 = 0.25$,

3tens

3tens Log. $\sqrt{3.1622776601 \times 1.7782794100} = \frac{0.5 + 0.25}{2}$ oder

Log. 2.3713737056 = 0,375

4tens Log. $\sqrt{2.3713737056 \times 1.7782794100} = \frac{0.375 + 0.25}{2}$ oder

Log. 2.0535250264 = 0.3125

5tens Log. $\sqrt{2.0535250264 \times 1.7782794100} = \frac{0.3125 + 0.25}{2}$ oder

Log. 1.9109529749 = 0.28125.

Und setzen wir die Rechnung noch weiter fort; so werden wir endlich den Logarithme von einer Zahl finden, die um kein Zehnmilliontheilchen mehr von 2 unterschieden ist, welcher allemal als der Logarithme der Zahl 2 selbst angesehen werden kann, ohne daß dadurch in den ausübenden Theilen der Mathematik ein beträchtlicher Fehler entsteht.

224. Wenn man einmal nach dieser Methode den Logarithme von 2 gefunden hat; so können noch die Logarithmen von einer grossen Menge anderer Zahlen gar leicht ausfindig gemacht werden.

Denn es sey Kürze halber Log. 2 = a; so ist

1tens, weil Log. pq = Log. p + Log. q,

Log. 20 = Log. 10 + Log. 2 = 1 + a
Log. 200 = Log. 100 + Log. 2 = 2 + a
Log. 2000 = Log. 1000 + Log. 2 = 3 + a rc.

2tens, weil Log. p^n = n Log. p,

Log. 4 = Log. 2^2 = 2a
Log. 8 = Log. 2^3 = 3a
Log. 16 = Log. 2^4 = 4a rc. und daher ferner
Log. 40 = Log. 10 + Log. 4 = 1 + 2a
Log. 400 = Log. 100 + Log. 4 = 2 + 2a
Log. 4000 = Log. 1000 + Log. 4 = 3 + 2a rc.
Log. 80 = Log. 10 + Log. 8 = 1 + 3a

Log.

Log. 800 = Log. 100 + Log. 8 = 2 + 3a
Log. 8000 = Log. 1000 + Log. 8 = 3 + 3a ꝛc.
Log. 160 = Log. 10 + Log. 16 = 1 + 4a
Log. 1600 = Log. 100 + Log. 16 = 2 + 4a
Log. 16000 = Log. 1000 + Log. 16 = 3 + 4a ꝛc.

3tens, weil Log. $\frac{p}{q}$ = Log. p — Log. q,

Log. 5 = 10 — Log. 2 = 1 — a, und daher
Log. 50 = 10 + Log. 5 = 2 — a
Log. 500 = Log. 100 + Log. 5 = 3 — a
Log. 5000 = Log. 1000 + Log. 5 = 4 — a ꝛc.
Log. 25 = Log. 5^2 = 2 — 2a
Log. 125 = Log. 5^3 = 3 — 3a
Log. 625 = Log. 5^4 = 4 — 4a ꝛc.
Log. 250 = Log. 10 + Log. 25 = 3 — 2a
Log. 2500 = Log. 100 + Log. 25 = 4 — 2a
Log. 25000 = Log. 1000 + Log. 25 = 5 — 2a ꝛc.
Log. 1250 = Log. 10 + Log. 125 = 4 — 3a
Log. 12500 = Log. 100 + Log. 125 = 5 — 3a
Log. 125000 = Log. 1000 + Log. 125 = 6 — 3a ꝛc.
Log. 6250 = Log. 10 + Log. 625 = 5 — 4a
Log. 62500 = Log. 100 + Log. 625 = 6 — 4a
Log. 625000 = Log. 1000 + Log. 625 = 7 — 4a ꝛc.

Nachdem man auch den Logarithme von 3 ebenso, wie jenen von 2 berechnet hat; so findet man wieder gar leicht die Logarithmen von allen Potenzen der Zahl 3 und von allen Produkten aus einer Potenz der Zahl 3 in jede andere Zahl, deren Logarithme schon bekannt ist. Und überhaupt sobald einmal die Logarithmen für alle Primzahlen berechnet sind; so findet man blos allein durch addiren auch die Logarithmen für alle übrigen Zahlen; indem alle diese Producte von jenen sind.

Da die Logarithmen nach der angezeigten Methode für alle ganzen Zahlen von 1 bis 100000 schon wirklich berechnet, und in Tafeln zusammengetragen sind; so bleibt für uns nichts mehr übrig, als daß wir noch den Gebrauch dieser Tafeln zeigen.

225. Weil Log. 1 = 0
Log. 10 = 1
Log. 100 = 2
Log. 1000 = 3
Log. 10000 = 4
Log. 100000 — 5 ꝛc.

so enthalten die Logarithmen der Zahlen zwischen 0 und 10 nebst den Zehntheilchen kein Ganzes,
jene der Zahlen zwischen 10 und 100 ein Ganzes,
jene der Zahlen zwischen 100 und 1000 zwey Ganze,
jene der Zahlen zwischen 1000 und 10000 drey Ganze,
jene der Zahlen zwischen 10000 u. 100000 vier Ganze ꝛc.
also hat jeder Logarithme ein Ganzes weniger, als seine Zahl Ziffern enthält.

Die Anzahl der Ganzen woraus jeder Logarithme besteht, heißt die **Kennziffer** desselben.

Wenn also eine Zahl n Ziffern hat; so ist die Kennziffer ihres Logarithme n — 1: und wenn die Kennziffer eines Logarithme n ist; so besteht die Zahl desselben aus n + 1 Ziffern.

226. Es sey vermittelst einer Tafel der Logarithmen, die sich nur auf 10000 erstrecket, von jeder Zahl der Logarithme zu finden.

Ist die gegebene Zahl eine ganze Zahl unter 10000; so stehet ihr Logarithme in der Tafel darneben.

Ist die gegebene Zahl ein Bruch; so erhält man ihren Logarithme, wenn man den Logarithme des Nenners von dem Logarithme des Zählers abzieht.

Ist der gegebenen Zahl noch ein Bruch angehängt; so bringt man die Ganzen und den Bruch unter einen Ausdruck, und verfährt wie zuvor. Nur muß in diesem Falle der Zähler die Tafel nicht übersteigen, sonst ist man gezwungen die Unterscheide der Zahlen mit den Unterscheiden ihrer Logarithmen, als proportionirt anzusehen, und folgende Proportion anzusetzen. Es verhält sich der Unter-

scheid

scheid der nächstgrößern und nächstkleinern Zahl zu dem Unterscheide der mittlern und nächstkleinern Zahl, wie der Unterscheid des nächstgrößern und nächstkleinern Logarithme zu dem Unterscheide des mittlern und nächstkleinern Logarithme, der zu dem nächstkleinern Logarithme addirt, den Logarithme der gegebenen Zahl giebt.

Diese Proportion ist freylich nicht wahr, indem die Unterscheide der Zahlen sich ganz gewiß nicht verhalten, wie die Unterscheide ihrer Logarithmen. Indessen giebt sie doch bey Zahlen, die nur um Brüche voneinander unterschieden sind, eine Annäherung, welche in der Ausübung hinlänglich ist.

Es sey der Logarithme von $\frac{78}{345}$ zu suchen; so ist

$$\text{Log. } 78 = 1.8920946$$
$$\text{Log. } 345 = 2.5378191, \text{ also}$$
$$\text{Log. } \frac{78}{345} = -0,6457245$$

Es sey der Logarithme von $73\frac{7}{15}$ zu suchen; so ist

$$73\frac{7}{15} = \frac{1102}{15}$$
$$\text{Log. } 1102 = 3.0421816$$
$$\text{Log. } 15 = 1.1760913, \text{ also}$$
$$\text{Log. } 73\frac{7}{15} = 1.8660903$$

Es sey der Logarithme von 92.32 zu finden; so ist

$$92.32 = \frac{9232}{100}$$
$$\text{Log. } 9232 = 3.9652958.$$
$$\text{Log. } 100 = 2.0000000, \text{ also}$$
$$\text{Log. } 92.32 = 1.9652958.$$

Es sey der Logarithme von 0.4678 zu finden; so ist

$$0.4678 = \frac{4678}{10000}$$

Log. 4678 = 3.6700602
Log. 10000 = 4.0000000, also

Log. 0.4678 = —0.3299398

Es sey der Logarithme von $5678\frac{34}{67}$ zu finden;

so ist Log. 5679 = 3.7542719
Log. 5678 = 3.7541954

ihr Unterscheid = 765

$$1 : \frac{34}{67} = 765 : \frac{765 \times 34}{67} = 388$$

3.7541954, also

$$\text{Log. } 5678\frac{34}{67} = 3.7542342$$

Es sey der Logarithme von 8240.356 zu suchen;

so ist Log. 8241 = 3.9159799
Log. 8240 = 3.9159272

ihr Unterscheid = 527

$$1 : \frac{356}{1000} = 527 : \frac{527 \times 356}{1000} = 187$$

3.9159272

Log. 8240.356 = 3.9159459.

Ist endlich die gegebene Zahl größer, als 10000; so wird sie in zween Factoren zerlegt, deren einer die 4 höchsten Ziffern der gegebenen Zahl als Ganze und die übrigen als Zehntheilchen enthält: der andere aber allemal aus 1 und soviel Nullen besteht, als jener Zehntheilige Ziffern hat: sodann werden die Logarithmen dieser zween Factoren gesucht und zusammenaddirt.

Es

Es sey der Logarithme von 48769 zu finden; so ist

$$48769 = 4876.9 \times 10$$
$$\text{Log. } 4877 = 3.6881528$$
$$\text{Log. } 4876 = 3.6880637$$

ihr Unterscheid = 891

$$1 : \frac{9}{10} = 891 : \frac{891 \times 9}{10} = 801$$
$$3.6880637$$
$$\text{Log. } 4876.9 = 3.6881438$$
$$\text{Log. } 10 = 1.0000000, \text{ also}$$
$$\text{Log. } 48769 = 4.6881438.$$

Es sey der Logarithme von 8567345.367 zu finden; so ist

$$8567345.367 = 8567.345367 \times 1000$$
$$\text{Log. } 8568 = 3.9328795$$
$$\text{Log. } 8567 = 3.9328288$$

ihr Unterscheid = 507

$$1 : \frac{345367}{1000000} = 507 : \frac{345367 \times 507}{1000000} = 175$$
$$3.9328288$$
$$\text{Log. } 8567.345367 = 3.9328463$$
$$\text{Log. } 1000 = 3.0000000, \text{ also}$$
$$\text{Log. } 8567345.367 = 6.9328463.$$

Wenn eine Zahl, welche die Tafel übersteigt, sich in Factoren zerlegen läßt, welche ganze Zahlen sind, und die Tafel nicht übersteigen; so findet man bequemer ihren Logarithme, wenn man die Logarithmen dieser Factoren zusammenaddirt. So ist

$$48769 = 6967 \times 7.$$
$$\text{Log. } 6967 = 3.8430458$$
$$\text{Log. } 7 = 0.8450980, \text{ also}$$
$$\text{Log. } 48769 = 4.6881438$$

227. Es sey vermittelst ebendieser Tafel von jedem Logarithme die Zahl zu finden.

Ist der gegebene Logarithme in der Tafel enthalten; so steht seine Zahl darneben.

Ist der gegebene Logarithme zwar kleiner als 4 Ganze, aber doch nicht in der Tafel begriffen; so muß man wieder die Unterscheide der Zahlen mit den Unterscheiden ihrer Logarithmen als proportionirt ansehen, und folgende Proportion ansetzen. Es verhält sich der Unterscheid des nächstgrößern und nächstkleinern Logarithme zu dem Unterscheide des mittlern und nächstkleinern Logarithme, wie der Unterscheide der nächstgrößern und nächstkleinern Zahl zu dem Unterscheide der mittlern und nächstkleinern Zahl, der zu der nächstkleinern Zahl addirt, die Zahl des gegebenen Logarithme giebt.

Es sey die Zahl von dem Logarithme 3.5894726 zu finden; so ist

der nächstgrößere	=	3.5895028
der nächstkleinere	=	3.5893910
ihr Unterscheid	=	1118
der mittlere	=	3.5894726
der nächstkleinere	=	3.5893910
ihr Unterscheid	=	816

$$1118 : 816 = 1 : \frac{816}{1118} = 0.729, \text{ allein}$$

3.5893910 = Log. 3885, also
3.5894726 = Log. 3885.729.

Ist der gegebene Logarithme größer, als 4 Ganze; so ist er als eine Summe aus zween Logarithmen anzusehen, deren einer aus 3 Ganzen und allen Zehntheilchen besteht, welche der gegebene enthält, der andere aber aus den Ganzen, die der gegebene noch über 3 enthält: sodann sind die Zahlen dieser zween Logarithmen zu suchen, und mit einander zu multipliciren.

Es sey die Zahl von dem Logarithme 4.9076531 zu suchen; so ist

4.9076531 = 3.9076531 + 1.0000000
der nächstgrößere = 3.9076800
der nächstkleinere = 3.9076263

ihr Unterscheid = 537

der mittlere = 3.9076531
der nächstkleinere = 3.9086263

ihr Unterscheid = 268

$537 : 268 = 1 : \frac{268}{537} = 0.499$, allein
3.9076263 = Log. 8084, also
3.9076531 = Log. 8084.499
1.0000000 = Log. 10, folglich

4.9076531 = 80844.99.

Es sey die Zahl von dem Logarithme 5.9934562 zu suchen; so ist

5.9934562 = 3.9934562 + 2.0000000
der nächstgrößere = 3.9934803
der nächstkleinere = 3.9934362

ihr Unterscheid = 441

der mittlere = 3.9934562
der nächstkleinere = 3.9934362

ihr Unterscheid = 200

$441 : 200 = 1 : \frac{200}{441} = 0.453$, allein
3.9934362 = Log. 9850, also
3.9934562 = Log. 9850.453
2.0000000 = Log. 100, folglich

5.9934562 = Log. 985045.3

Ist

Ist endlich der gegebene Logarithme verneinend; so kann man soviel Ganze dazu addiren, als vonnöthen sind, daß er bejahend wird, von dieser Summe die Zahl suchen, und diese Zahl wieder durch 1 und soviel 0 dividiren, als man Einheiten zu dem verneinenden Logarithme addiret hat.

Es sey von dem Logarithme — 0.6457245 die Zahl zu suchen; so ist

$$\begin{array}{rl} 1.0000000 = & \text{Log. } 10 \\ -\ 0.6457245 & \text{der gegebene} \\ \hline \text{die Summe } +\ 0.3542755 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{der nächstgrößere} = & 0.4771213 \\ \text{der nächstkleinere} = & 0.3010300 \\ \hline \text{ihr Unterscheid} = & 1760913 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{der mittlere} = & 0.3542755 \\ \text{der nächstkleinere} = & 0.3010300 \\ \hline \text{ihr Unterscheid} = & 532455 \end{array}$$

$$1760913 : 532455 = 1 : \frac{532455}{1760913} = 0.302,$$

allein $0.3010300 = \text{Log. } 2$, also

$0.3542755 = \text{Log. } 2.302$, folglich

$$-\ 0.6457245 = \text{Log. } 0.2302 = \text{Log. } \frac{2302}{10000}$$

$$\text{Es ist Log. } \frac{1}{a} = \text{Log. } 1 - \text{Log. } a = -\text{Log. } a.$$

Also findet man auch die Zahl $\frac{1}{a}$ von einem verneinenden Logarithme — Log. a, wenn man 1 durch a die Zahl von ebendemselben bejahenden Logarithme + Log. a dividiret.

Diesemnach wird die Zahl von — 0.6457245, wie folgt, gefunden.

der

der nächstgrößere $= 0.6989700$
der nächstkleinere $= 0.6020600$
ihr Unterscheid $= 969100$

der mittlere $= 0.6457245$
der nächstkleinere $= 0.6020600$
ihr Unterscheid $= 436645$

$$969100 : 436645 = 1 : \frac{436645}{969100} = 0.450,$$

allein $0.6020600 =$ Log. 4, also
$0.6457245 =$ Log. 4.450, folglich

$$- 0.6457245 = \text{Log.} \frac{1}{4.450} = \text{Log.} \frac{1000}{4450}.$$

Begehrt man endlich, daß die Zahl $\frac{1}{a}$ von einem verneinenden Logarithme — Log. a was immer für einen gegebenen Nenner ab habe; so kömmt es nur darauf an, daß wir den Zähler b von dem Bruche $\frac{b}{ab} = \frac{1}{a}$ finden: allein es ist

$$\text{Log. } b = \text{Log. } ab - \text{Log. } a.$$

Man findet also den Logarithme des Zählers von dem Bruche, der einen gegebenen Nenner hat, und die Zahl von einem gegebenen verneinenden Logarithme ist, wenn man ebendiesen Logarithme bejahend genommen von dem Logarithme des gegebenen Nenners abzieht.

Es sey von $- 0.6457245$ die Zahl zu finden, welche 345 zum Nenner hat; so ist

Log. $345 = 2.5378191$
der gegebene $+ 0.6457245$
ihr Unterscheid $= 1.8920946 =$ Log. 78

also ist $- 0{,}6457245 = \text{Log.} \frac{78}{345}$.

Weil

Weil die Logarithmentafel vom Herrn Obristwachtmeister Unterberger von 1 bis auf 20000 reichet, und nebst den Logarithmen auch ihre Unterscheide enthält; so ist ihr Gebrauch viel bequemer; indem man den Unterscheid des nächstgrößern und nächstkleinern Logarithme ohne weitere Rechnung schon in der Tafel ausgesetzt findet.

Wir werden uns derselben in der Folge allezeit bedienen

Anwendung der Lehre der Logarithmen.

228.

Vermittelst dieser Tafel der Logarithmen findet man also

1tens jedes Product, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammenaddirt, und von dieser Summe die Zahl suchet.

2tens jeden Quotienten, wenn man den Logarithme des Theilers von dem Logarithme des Dividends abzieht, und von diesem Unterscheide die Zahl suchet.

3tens jede Potenz einer gegebenen Zahl, wenn man den Logarithme der Zahl mit dem Exponenten der Potenz multipliciret, und von diesem Producte die Zahl suchet.

4tens jede Wurzel einer gegebenen Zahl, wenn man den Logarithme der Zahl durch den Exponenten der Wurzel dividirt, und von diesem Quotienten die Zahl suchet.

5tens zu jeden drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionirte, wenn man die Logarithmen der mittlern Glieder zusammenaddirt, von dieser Summe den Logarithme des ersten Gliedes abzieht, und von diesem Unterscheide die Zahl suchet.

6tens endlich können noch dadurch Gleichungen aufgelöset werden, worinn die Unbekannte als ein Exponent der Potenz oder Wurzel vorkömmt.

Denn

Denn ist $a^x = b$; so ist

$$x \text{ Log. } a = \text{Log. } b$$

$$x = \frac{\text{Log. } b}{\text{Log. } a} \text{ und}$$

ist $\sqrt[x]{a} = b$; so ist

$$\frac{\text{Log. } a}{x} = \text{Log. } b$$

$$\text{Log. } a = x \text{ Log. } b$$

$$x = \frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } b}.$$

Hierinn besteht der Vortheil, den uns die Logarithmen verschaffen. Freylich erhält man die durch Hilfe der Logarithmen gesuchte Zahl nie oder nur zufälliger Weise vollkommen, weil die meisten Logarithmen nur durch Annäherung gefunden worden sind. Allein der Unterscheid der gefundenen und der gesuchten Zahl ist so gering, daß er in der Ausübung gar nicht in Betrachtung zu ziehen ist.

Es sey die dritte Wurzel von 64964808 zu suchen; so ist $64964808 = 6496.4808 \times 10000$

$$1 : \frac{4808}{10000} = 669 : \frac{4808 \times 669}{10000} = 321$$

$$\text{Log. } 6496 = 3.8126460$$

$$\text{Log. } 6496.4808 = 3.8126781$$

$$\text{Log. } 64964808 = 7.8126781$$

$$\text{Log. } \sqrt[3]{64964808} = 2.6042260, \text{ also}$$

$$\sqrt[3]{64964808} = 402.$$

Es sey die dritte Wurzel von 1367631 zu suchen; so ist $1367631 = 13676.31 \times 100$

$$1 : \frac{31}{100} = 317 : \frac{317 \times 31}{100} = 98$$

$$\text{Log } 13676 = 4.1359591$$

$$\text{Log. } 13676.31 = 4.1359689$$

$$\text{Log. } 1367631 = 6.1359689$$

Log.

$$\text{Log.}\sqrt[3]{1367631} = 2.0453229 \text{ also}$$
$$\sqrt[3]{1367631} = 111.$$

Es sey $5204 : 9567 = 4589 : x$; so ist

$$\begin{aligned}
\text{Log. } 4589 &= 3.6617181 \\
\text{Log. } 9567 &= 3.9807758 \\
\hline
\text{Summe} &= 7.6424939 \\
\text{Log. } 5204 &= 3.7163373 \\
\hline
\text{Log. } x &= 3.9261566 \\
\text{Log. } 8436 &= 3.9261366 \\
\hline
\text{ihr Unterscheid} &= \quad 200
\end{aligned}$$

$$515 : 200 = 1 : \frac{200}{515} = 0,388; \text{ also ist}$$
$$3.9261566 = \text{Log. } 8436.388 \text{ und}$$
$$x = 8436.388.$$

229. Ist nun aus der Gleichung $z = ab^{n-1}$ für das letzte Glied einer geometrischen Progression auch b oder n zu suchen; so wird

$$b^{n-1} = \frac{z}{a}$$
$$(n-1)\,\text{Log.}\,b = \text{Log. } z - \text{Log. } a$$
$$\text{Log.}\,b = \frac{\text{Log. } z - \text{Log. } a}{n-1} \text{ und}$$
$$n-1 = \frac{\text{Log. } z - \text{Log. } a}{\text{Log. } b}$$
$$n = 1 + \frac{\text{Log. } z - \text{Log. } a}{\text{Log. } b}.$$

Suche den Nenner einer geometrischen Progression von 11 Gliedern, wovon das erste Glied 5 und das letzte 295245 ist

Weil

Weil $z = ab^{n-1}$; so ist

$$295245 = 5b^{10}$$
$$59049 = b^{10}$$
$$\text{Log. } 59049 = 10 \text{ Log. } b \text{ und}$$
$$\text{Log. } b = \frac{\text{Log. } 59049}{10}, \text{ allein es ist}$$
$$59049 = 6561 \times 9$$
$$\text{Log. } 6561 = 3.8169700$$
$$\text{Log. } 9 = 0.9542425$$
$$\text{Log. } 59049 = 4.7712125 \text{ also}$$
$$\text{Log. } b = 0.4771212$$
$$\text{und } b = 3$$

Suche die Anzahl der Glieder einer geometrischen Progression, wovon der Nenner 3, das erste Glied 5, und das letzte 295245 ist.

Weil $z = ab^{n-1}$; so ist

$$295245 = 5 \times 3^{n-1}$$
$$59049 = 3^{n-1}$$
$$\text{Log. } 59049 = (n-1) \text{ Log. } 3$$
$$n - 1 = \frac{\text{Log. } 59049}{\text{Log. } 3}$$
$$n = 1 + \frac{\text{Log. } 59049}{\text{Log. } 3}$$
$$n = 1 + \frac{4.7712125}{0.4771213}$$
$$n = 1 + 10$$
$$n = 11.$$

230. Weil in den zwo Gleichungen

$$z = ab^{n-1} \text{ und}$$
$$S = \frac{bz - a}{b - 1}$$

für das letzte Glied und die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression 5 Größen enthalten sind; so kön-

nen

nen wir jede zwo finden, sobald wir die 3 übrigen kennen; ausser es wäre a, n, und s, oder z, n, und s gegeben. Denn in diesen zween Fällen kömmt man auf vermischte Gleichungen von höhern Graden, die wir noch nicht aufzulösen gelernet haben.

Suche die Anzahl der Glieder und die Summe aller Glieder der geometrischen Progression, wovon der Nenner 3, das erste Glied 100 und das letzte Glied 53144100 ist.

Es ist also $s = \frac{3 \times 53144100 - 100}{2}$

$$s = \frac{159432300 - 100}{2}$$

$$s = 79716100 \text{ und}$$

$$n = 1 + \frac{\text{Log. } 53144100 - \text{Log. } 100}{\text{Log. } 3}\text{; allein es ist}$$

$$53144100 = 6561 \times 8100$$
$$\text{Log. } 6561 = 3.8169700$$
$$\text{Log. } 8100 = 3.9084850$$

$$\text{Log. } 53144100 = 7.7254550$$
$$\text{Log. } 100 = 2.0000000\text{, also}$$

$$n = 1 + \frac{5.7254550}{0.4771213}$$
$$n = 1 + 12$$
$$n = 13.$$

231. Jemand übergiebt einer Handlungsgesellschaft a Gulden auf n Jahre für c Procente mit diesem Bedingnisse, daß nach jedem Jahre die Zinsen wieder zu dem Kapital geschlagen werden. Auf wieviel Gulden wird das Kapital nach n Jahren anwachsen?

Weil 100 fl. in einem Jahre 100 + c fl. geben; so geben a fl. im ersten Jahre $\left(\frac{100 + c}{100}\right)a$

(100

$\left(\frac{100+c}{100}\right)a$ im 2ten Jahre $\left(\frac{100+c}{100}\right)^2 a$

$\left(\frac{100+c}{100}\right)^2 a$ im 3ten Jahre $\left(\frac{100+c}{100}\right)^3 a$

$\left(\frac{100+c}{100}\right)^3$ im 4ten Jahre $\left(\frac{100+c}{100}\right)^4 a$ und

$\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1} a$ im nten Jahre $\left(\frac{100+c}{100}\right)^n a$

folglich ist das durch n Jahre angewachsene

$$\text{Kapital } x = \left(\frac{100+c}{100}\right)^n a$$

Es sey $a = 5000$, $n = 10$, und $c = 5$; so ist

$$x = \left(\frac{105}{100}\right)^{10} \times 5000$$

$$\text{Log. } x = \text{Log. } 5000 + 10(\text{Log. } 105 - \text{Log. } 100)$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Log. } 105 &=& 2.0211893 \\ \text{Log. } 100 &=& 2.0000000 \\ \hline \text{Log. } 105 - \text{Log. } 100 &=& 0.0211893 \\ 10(\text{Log.}105 - \text{Log}100) &=& 0.2118930 \\ \text{Log. } 5000 &=& 3.6989700 \\ \hline \text{Log. } x &=& 3.9108630 \\ \text{Log. } 8144 &=& 3.9108378 \\ \hline \text{ihr Unterscheid} &=& 252 \end{array}$$

$$533 : 252 = 1 : \frac{252}{533}; \text{ also ist}$$

$$3.9108630 = \text{Log. } 8144 \frac{252}{533} \text{ und}$$

$$x = 8144 \frac{252}{533} \text{ fl.}$$

Nach wieviel Jahren wird ein gegen 4 Procente angelegtes Kapital von 3560 fl. bis auf 10000 fl. anwachsen,

sen, da die Zinsen alle Jahre wieder zu dem Kapital geschlagen werden?

Weil $x = \left(\frac{100+c}{100}\right)^n a$; so ist hier

$$10000 = \left(\frac{104}{100}\right)^n \times 3560$$

$$\text{Log. } 10000 = n(\text{Log. } 104 - \text{Log. } 100) + \text{Log. } 3560$$

$$n = \frac{\text{Log. } 10000 - \text{Log. } 3560}{\text{Log. } 104 - \text{Log. } 100}$$

$$\text{Log. } 10000 = 4.0000000$$
$$\text{Log. } 3560 = 3.5514500$$

$$\text{Log. } 10000 - \text{Log. } 3560 = 0.4485500$$

$$\text{Log. } 104 = 2.0170333$$
$$\text{Log. } 100 = 2.0000000$$

$\text{Log. } 104 - \text{Log. } 100 = 0.0170333$; also ist

$$n = \frac{0.4485509}{0.0170333} = 26.33 \text{ Jahre.}$$

Vor 10 Jahren hat jemand ein Kapital gegen 6 Procente angelegt, und die Zinsen immer wieder zu dem Kapital geschlagen. Nun zieht er überhaupt 4500 fl. zurücke. Wieviel Gulden Kapital hat er angelegt?

Weil $x = \left(\frac{100+c}{100}\right)^n a$; so ist hier

$$4500 = \left(\frac{106}{100}\right)^{10} \times a$$

$$\text{Log. } 4500 = 10(\text{Log. } 106 - \text{Log. } 100) + \text{Log. } a$$
$$\text{Log. } a = \text{Log. } 4500 - 10(\text{Log. } 106 - \text{Log. } 100)$$

$$\text{Log. } 106 = 2.0253059$$
$$\text{Log. } 100 = 2.0000000$$

$$\text{Log. } 106 - \text{Log. } 100 = 0.0253059$$

$$10(\text{Log. }106 - \text{Log. }100) = 0.2530590$$
$$\text{Log. }4500 = 3.6582125$$
$$\text{Log. }a = 3.4001535$$
$$\text{Log. }2512 = 3.4000196$$
ihr Unterscheid $= 1339$

$1729 : 1339 = 1 : \frac{1339}{1729} = 0.77$; also ist
$3.4001535 = \text{Log. }2512.77$ und
$a = 2512.77$ fl.

232. Es legt einer a fl. gegen c Procente an, und schlägt nicht nur die Zinsen immer wieder zu dem Kapital, sondern vermehret noch überdieß sein Kapital alle Jahre mit einer neuen Summe b. Auf wieviel Gulden wird das Kapital nach n Jahren anwachsen?

Dieses Kapital steigt in einem Jahre auf

$$\left(\frac{100+c}{100}\right)^1 a + b \text{ fl.}$$

in 2 Jahren auf

$$\left(\frac{100+c}{100}\right)^2 a + \left(\frac{100+c}{100}\right)^1 b + b$$

in 3 Jahren auf

$$\left(\frac{100+c}{100}\right)^3 a + \left(\frac{100+c}{100}\right)^2 b + \left(\frac{100+c}{100}\right)^1 b + b$$

in 4 Jahren auf

$$\left(\frac{100+c}{100}\right)^4 a + \left(\frac{100+c}{100}\right)^3 b + \left(\frac{100+c}{100}\right)^2 b + \left(\frac{100+c}{100}\right)^1 b + b$$

und in n Jahren auf

$$\left(\frac{100+c}{100}\right)^n a + \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1} b + \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-2} b + \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-3} b + \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-4} b + \ldots \left(\frac{100+c}{100}\right)^1 b + b$$

Es

Es besteht also dieses Kapital nach n Jahren 1tens aus $\left(\frac{100+c}{100}\right)^n$ a fl., und 2tens aus der Summe aller Glieder dieser geometrischen Progression b, $\left(\frac{100+c}{100}\right)^1$ b, $\left(\frac{100+c}{100}\right)^2$ b, $\left(\frac{100+c}{100}\right)^3$ b, $\left(\frac{100+c}{100}\right)^4$ b... ... $\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}$ b.

Es ist aber die Summe aller Glieder dieser Progression gleich dem letzten Gliede $\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}$ b multiplicirt mit dem Nenner $\left(\frac{100+c}{100}\right)$ weniger dem ersten Gliede b, dividirt durch den Nenner weniger 1, also

$$= \frac{\left(\frac{100+c}{100}\right)^n b - b}{\left(\frac{100+c}{100}\right) - 1}$$

. Folglich ist das nach n Jahren angewachsene Kapital

$$x = \left(\frac{100+c}{100}\right)^n a + \frac{\left(\frac{100+c}{100}\right)^n b - b.}{\left(\frac{100+c}{100}\right) - 1}$$

$$x = \left(\frac{100+c}{100}\right)^n a + \frac{\left(\frac{100+c}{100}\right)^n \times 100b - 100b}{c}$$

$$x = \left(\frac{100+c}{100}\right)^n a + \left(\frac{100+c}{100}\right)^n \times \frac{100b}{c} - \frac{100b}{c}$$

$$x = \left(\frac{100+c}{100}\right)^n \left(a + \frac{100b}{c}\right) - \frac{100b}{c}.$$

Nach

Nach wieviel Jahren wird ein Kapital von 1000 fl. gegen 5 Procente angelegt bis auf 1000000 fl. anwachsen, wenn man alle Jahre nebst den Zinsen noch 100 fl. hinzuthut? Weil

$$x = \left(\frac{100 + c}{100}\right)^n \left(a + \frac{100b}{c}\right) - \frac{100b}{c}; \text{ so ist}$$

$$1000000 = \left(\frac{105}{100}\right)^n (1000 + 2000) - 2000$$

$$1002000 = 3000 \left(\frac{105}{100}\right)^n$$

$$334 = \left(\frac{105}{100}\right)^n$$

$$\text{Log. } 344 = n(\text{Log. } 105 - \text{Log. } 100)$$

$$n = \frac{\text{Log. } 334}{\text{Log. } 105 - \text{Log. } 100}$$

$$n = \frac{2.5237465}{0.0211893} = 119.1 \text{ Jahr.}$$

Wenn man jährlich anstatt b fl. hinzuzusetzen, b fl. zu seiner Unterhaltung verwendet; so bekömmt b eine entgegengesetzte Bezeichnung, und die Gleichung

$$x = \left(\frac{100+c}{100}\right)^n \left(a + \frac{100b}{c}\right) - \frac{100b}{c}$$

wird in folgende verwandelt.

$$x = \left(\frac{100+c}{100}\right)^n \left(a - \frac{100b}{c}\right) + \frac{100b}{c}.$$

Es ist für sich klar, daß in diesem Falle das Kapital wächst oder abnimmt, nachdem die jährlichen Zinsen größer oder kleiner sind, als der jährliche Aufwand ist.

Einer hat ein Vermögen von 100000 Gulden gegen 5 Procente ausstehen, und macht jährlich 8000 fl. Aufwand. Nach wieviel Jahren wird der Mann ein Bettler werden?

Weil $x = \left(\frac{100+c}{100}\right)^n \left(a - \frac{100\,b}{c}\right) + \frac{100b}{c}$;
so ist hier

$$0 = \left(\frac{105}{100}\right)^n (100000 - 160000) + 160000$$

$$0 = \left(\frac{105}{100}\right)^n (-60000) + 160000$$

$$60000\left(\frac{105}{100}\right)^n = 160000$$

$$\left(\frac{105}{100}\right)^n = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$n\,(\text{Log. } 105 - \text{Log. } 100) = \text{Log. } 8 - \text{Log. } 3$$

$$n = \frac{\text{Log. } 8 - \text{Log. } 3}{\text{Log. } 105 - \text{Log. } 100} = \frac{0.4259687}{0.0211893} = 20.1 \text{ J.}$$

233. Einer hat nach n Jahren a Gulden zu empfangen. Diese verkauft er für baares Geld gegen c Procente Abzug, das ist, für 100 + c Gulden, die er ein Jahr später zu empfangen hat, nimmt er allemal 100 Gulden an. Man fragt, wieviel für jene a Gulden itzt zu bezahlen sey? x Gulden.

Weil für 100 + c fl. ein Jahr früher nur 100 bezahlt werden; so gelten a fl. 1 Jahr früher nur $\left(\frac{100}{100+c}\right)^1$ a fl.

$\left(\frac{100}{100+c}\right)^1$ a fl. 1 Jahr früher nur $\left(\frac{100+c}{100}\right)^2$ a fl.

$\left(\frac{100}{100+c}\right)^2$ a fl. 1 Jahr früher nur $\left(\frac{100}{100+c}\right)^3$ a fl.

$\left(\frac{100}{100+c}\right)^3$ a fl. 1 Jahr früher nur $\left(\frac{100}{100+c}\right)^4$ a fl.

also gelten a fl. 1 Jahr früher nur $\left(\frac{100}{100+c}\right)^1$ a fl.

a fl. 2 Jahr früher nur $\left(\frac{100}{100+c}\right)^2$ a fl.

$$a \text{ fl. 3 Jahr früher nur } \left(\frac{100}{100+c}\right)^3 a \text{ fl.}$$

$$a \text{ fl. 4 Jahr früher nur } \left(\frac{100}{100+c}\right)^4 a \text{ fl.}$$

und $$a \text{ fl. n Jahr früher nur } \left(\frac{100}{100+c}\right)^n a \text{ fl.}$$

Daher ist $x = \left(\frac{100}{100+c}\right)^n a.$

Wieviel betragen 10000 fl., die erst nach 9 Jahren zu empfangen sind, itzt baar gegen 6 Procente Abzug gerechnet?

Weil $x = \left(\frac{100}{100+c}\right)^n a$; so ist hier

$$x = \left(\frac{100}{106}\right)^9 \times 10000, \text{ und}$$

$$\text{Log. } x = 9(\text{Log. } 100 - \text{Log. } 106) + \text{Log. } 10000$$

$$\text{Log. } 100 = 2.0000000$$
$$\text{Log. } 106 = 2.0253059$$

$$\text{Log. } 100 - \text{Log. } 106 = -0.0253059$$
$$9(\text{Log. } 100 - \text{Log. } 106) = -0.2277531$$
$$\text{Log. } 10000 = 4.0000000$$

$$\text{Log. } x = 3.7722469$$
$$\text{Log. } 5918 = 3.7721750$$

$$\text{ihr Unterscheid} = 719$$

$734 : 719 = 1 : \frac{719}{734} = 0{,}98$; also ist

$3.7722469 = \text{Log. } 5918{,}98$, und

$x = 5918.98$ fl.

234. Einer hat auf n Jahre eine jährliche Rente von a fl. Gulden zu genießen. Nun verkauft er solche für baares Geld gegen c Procente Abzug. Wieviel ist itzt für die ganze Rente zu bezahlen? x Gulden.

Weil die a fl., so nach einem Jahre zu empfangen, $\left(\frac{100}{100+c}\right)^1 a$,

jene, so nach 2 Jahren zu empfangen, $\left(\frac{100}{100+c}\right)^2 a$,

jene, so nach 3 Jahren zu empfangen, $\left(\frac{100}{100+c}\right)^3 a$,

jene, so nach n Jahren zu empfangen sind $\left(\frac{100}{100+c}\right)^n a$ fl. betragen; so ist

$$x = \left(\frac{100}{100+c}\right)^1 a + \left(\frac{100}{100+c}\right)^2 a + \left(\frac{100}{100+c}\right)^3 a + \left(\frac{100}{100+c}\right)^4 a + \ldots \left(\frac{100}{100+c}\right)^n a,$$

also gleich der Summe aller Glieder einer geometrischen Progression von n Gliedern, deren erstes Glied $\left(\frac{100}{100+c}\right)^1 a$, und der Nenner $\frac{100}{100+c}$ ist.

Daher ist

$$x = \frac{\left(\frac{100}{100+c}\right) a \times \left(\frac{100}{100+c}\right)^n - \left(\frac{100}{100+c}\right) a}{\frac{100}{100+c} - 1}$$

$$x = \frac{\left(\frac{100}{100+c}\right)^{n+1} a - \left(\frac{100}{100+c}\right) a}{\frac{100}{100+c} - 1}$$

$$x = \frac{(100+c)\left(\frac{100}{100+c}\right)^{n+1} a - 100\,a}{-c}$$

x

$$x = \frac{100a}{c} - \left(\frac{100+c}{c}\right)\left(\frac{100}{100+c}\right)^{n+1} a$$

Jemand kauft eine jährliche Rente von 1000 fl. auf 10 Jahre für baares Geld gegen 6 Procente Abzug. Wie hoch ist diese Rente zu bezahlen?

Weil $x = \frac{100a}{c} - \left(\frac{100+c}{c}\right)\left(\frac{100}{100+c}\right)^{n+1} a$;

so ist hier $x = \frac{100000}{6} - \left(\frac{106}{6}\right)\left(\frac{100}{106}\right)^{11} \times 1000$

$$11\,(\text{Log.}\,100 - \text{Log.}\,106) = -0.2783649$$

$$\text{Log.}\,1000 = 3.0000000$$

$$\text{Log.}\,\frac{106}{6} = 1.2471546$$

$$\text{Log.}\left(\frac{100}{6}\right)\left(\frac{100}{106}\right)^{11} \times 1000 = 3.9687897$$

$$\text{Log.}\,9306 = 3.9687630$$

$$\text{ihr Unterscheid} = 267$$

$467 : 267 = 1 : \frac{267}{467} = 0.57$; also ist

$3.9687897 = \text{Log.}\,9306.57$, und

$\left(\frac{106}{6}\right)\left(\frac{100}{100+c}\right)^{11} \times 1000 = 9306.57$; folglich

$$x = \frac{100000}{6} - 9306.57$$

$$x = 16666.66 - 9306.57$$

$$x = 7360.09$$

Einer verkauft eine jährliche Rente von 1000 fl. gegen 6 Procente Abzug, und bekömmt dafür 7360 fl. Man fragt, auf wieviel Jahre diese Rente verkauft worden ist?

Weil $x = \frac{100a}{c} - \left(\frac{100+c}{c}\right)\left(\frac{100}{100+c}\right)^{n+1} a$;

so

so ist hier

$$7360 = \frac{100000}{6} - \left(\frac{106}{6}\right)\left(\frac{100}{106}\right)^{n+1} \times 1000$$

$$\left(\frac{106000}{6}\right)\left(\frac{100}{106}\right)^{n+1} = \frac{100000 - 44160}{6}$$

$$106000\left(\frac{100}{106}\right)^{n+1} = 55840$$

$$\left(\frac{100}{106}\right)^{n+1} = \frac{5584}{10600} = \frac{1396}{2650}$$

$$(n+1)(\text{Log.}100 - \text{Log.}106) = \text{Log.}1396 - \text{Log.}2650$$

$$n + 1 = \frac{\text{Log.}1396 - \text{Log.}2650}{\text{Log.}100 - \text{Log.}106} \text{ oder}$$

$$n + 1 = \frac{\text{Log.}2650 - \text{Log.}1396}{\text{Log.}106 - \text{Log.}100}$$

$$\text{Log.}2650 = 3.4232459$$
$$\text{Log.}1396 = 3.1448854$$

$$\text{Log.}2650 - \text{Log.}1396 = 0.2783605$$
$$\text{Log.}106 - \text{Log.}100 = 0.0253059; \text{ also ist}$$

$$n + 1 = \frac{0.2783605}{0.0253059} = 11, \text{ und}$$

$$n = 10.$$

Von Ausziehung der Kubikwurzel aus zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken.

235.

Es ist $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$= a^3 + b(3a^2 + 3ab + b^2)$; folglich

$$a = \sqrt[3]{a^3}, \text{ und } b = \frac{3a^2b + 3ab^2 + b^3}{3a^2 + 3ab + b^2}.$$

Wir

Wir nehmen daher um $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$ zu finden,

1tens $\sqrt[3]{a^3}$, damit wir a, den ersten Theil der Kubikwurzel $a + b$ bekommen, und ziehen a^3 den Würfel dieses gefundenen ersten Theiles der Kubikwurzel von dem gegebenen Würfel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ab;

2tens fangen wir den Rest $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ durch $3a^2$ das dreyfache Quadrat des schon gefundenen ersten Theiles der Kubikwurzel zu theilen an, damit wir b, den zweyten Theil ebendieser Wurzel erhalten;

3tens ergänzen wir den Theiler $3a^2$, indem wir noch $3ab$ das dreyfache Product beeder Theile, und b^2 das Quadrat des zweyten Theiles ebendieser Wurzel dazu addiren;

4tens endlich multipliciren wir diesen ergänzten Theiler $3a^2 + 3ab + b^2$ noch mit b, und ziehen das Product $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ von dem Reste $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ab, damit nichts mehr übrig bleibe, wenn $a + b$ die gesuchte Kubikwurzel ist.

Dieses Verfahren wollen wir, wie folgt, vorstellen:

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$$

$$\begin{array}{l} a^3 \\ \hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \; : \; 3a^2 + 3ab + b^2 \\ 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Eben so findet man

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2 + 3a + 1} = a + 1$$

$$\begin{array}{l} a^3 \\ \hline + 3a^2 + 3a + 1 \; : \; 3a^2 + 3a + 1 \\ + 3a^2 + 3a + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\sqrt[3]{8a^3}$

$$\sqrt[3]{8a^3 - 60a^2 + 150a - 125} = 2a - 5$$
$$\begin{array}{l} 8a^3 \\ \hline -60a^2 + 150a - 125 \; : \; 12a^2 - 30a + 25 \\ -60a^2 + 150a - 125 \\ \hline 0 \end{array}$$

Bleibt noch ein zweyter Rest; so kann man die zween gefundenen Theile der Kubikwurzel als den ersten ansehen, und, da ihr Würfel schon abgezogen ist, diesen zweyten Rest mit ihrem dreyfachen Quadrate zu dividiren anfangen, und den dritten Theil der Kubikwurzel, so wie den 2ten finden, u. s. f.

Von Ausziehung der Kubikwurzel aus ungenannten und genannten Zahlen.

236.

Die Würfel der einzelnen Zahlen sind folgende:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Würfel	1	8	27	64	125	216	343	512	729.

Ferner ist

$$10^3 = 1000$$
$$100^3 = 1000000$$
$$1000^3 = 1000000000$$
$$10000^3 = 1000000000000$$
$$100000^3 = 1000000000000000 \text{ ꝛc:}$$

Also enthält die Kubikwurzel

1 Ziffern, da der Würfel 1, 2, oder 3,
2 Ziffern, da der Würfel 4, 5. oder 6,
3 Ziffern, da der Würfel 7, 8, oder 9,
4 Ziffern, da der Würfel 10, 11, oder 12,
5 Ziffern, da der Würfel 13, 14, oder 15, und
n Ziffern, da der Würfel $3n - 2$, $3n - 1$ oder $3n$ Ziffern enthält.

Wenn

Wenn wir daher eine gegebene Zahl von der Einheit an in Klassen, jede von drey Ziffern eintheilen; so wird die Kubikwurzel derselben aus ebensovielen Ziffern bestehen, als die Zahl Klassen enthält; und einer höhern Klasse des Würfels allemal wieder eine höhere Ziffer der Kubikwurzel entsprechen.

Besteht nun ein gegebener Würfel aus zwoen Klassen und folglich die Kubikwurzel desselben aus Zehnern und Einheiten; so können wir die Anzahl der Zehner = a und die Anzahl der Einheiten = b setzen, und folglich die Kubikwurzel des gegebenen Würfels ebenso, wie die Kubikwurzel dieses algebraischen Ausdruckes $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ finden, wenn wir

1tens um die Anzahl der Zehner zu finden von dem Würfel, welcher der höchsten Klasse am nächsten kömmt, die Kubikwurzel nehmen, und diesen Würfel von der höchsten Klasse abziehen;

2tens zu diesem Reste der höchsten Klasse die folgende addiren, und diese Summe durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Zehner der Kubikwurzel zu dividiren anfangen, um auch die Anzahl der Einheiten ebenderselben zu bekommen;

3tens diesen Theiler dadurch ergänzen, daß wir das dreyfache Product aus jenen Zehnern und diesen Einheiten und das Quadrat ebendieser Einheiten noch dazu addiren;

4tens endlich noch das Product aus den gefundenen Einheiten der Kubikwurzel in diesen ergänzten Theiler, von jenem Dividende abziehen, damit nichts mehr übrig bleibe.

So findet man

$$\sqrt[3]{175|616} = 56$$

$$\begin{array}{l} 125 \\ \hline 50616 \; : \; 7500, \; 3a^2 \\ \qquad\qquad\; 900, \; 3ab \\ \qquad\qquad\;\; 36, \; b^2 \\ \hline 50616 = 8436 \times 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{405|224} = 74$$

$$\begin{array}{l}
343 \\ \hline
62224 \quad : \quad 14700,\ 3a^2 \\
\qquad\qquad\qquad 840,\ 3ab \\
\qquad\qquad\qquad\ \ 16,\ b^2 \\ \hline
62224 = 15556 \times 4 \\ \hline
\quad 0
\end{array}$$

Besteht der gegebene Würfel aus dreyen oder mehrern Klassen; so findet man nach voriger Methode aus den zwo höchsten Klassen, die zwo höchsten Ziffern der Kubikwurzel, und die folgenden nächstniedrigern Ziffern der Kubikwurzel, eine nach der andern, wenn man die schon gefundenen allemal als den ersten Theil a der Kubikwurzel ansieht, und, weil ihr Würfel schon abgezogen ist, sogleich durch ihr dreyfaches Quadrat die Summe aus dem Reste der höheren Klassen und aus der nächstniedrigern Klasse zu dividiren anfängt, und wie zuvor verfährt.

So wird

$$\sqrt[3]{12|326|391} = 231$$

$$\begin{array}{l}
8 \\ \hline
4326 \quad : \quad 1200,\ 3a^2 \\
\qquad\qquad\quad 180,\ 3ab \\
\qquad\qquad\qquad 9,\ b^2 \\ \hline
4167 = 1389 \times 3 \\ \hline
159391 \quad : \quad 158700,\ 3a^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 690,\ 3ab \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 1,\ b^2 \\ \hline
159391 = 159391 \times 1 \\ \hline
\quad 0
\end{array}$$

Weil

Weil man nach dieser Methode aus dem Reste der höhern Klassen und der nächstniedrigern Klasse allemal wieder eine niedrigere Ziffer für die Kubikwurzel findet; so ist bey einem Würfel, der Zehntheilchen enthält, nichts besonders zu beobachten, als daß man die Klassen von der Einheit an auch zur Rechten fortsetze, und die letzte mit 0 ergänze, wenn sie weniger, als drey Ziffern enthält.

So wird

$$\sqrt[3]{2.|352|637} = 1.33$$

$$\underline{1}$$

$$1\,352 \quad : \quad 300,\ 3a^2$$
$$90,\ 3ab$$
$$\underline{9,\ b^2}$$

$$\underline{1\,197} = \underline{399} \times 3$$

$$155637 \quad : \quad 50700,\ 3a^2$$
$$1170,\ 3ab$$
$$\underline{9,\ b^2}$$

$$\underline{155637} = 51879 \times 3$$

$$0$$

Wenn, nachdem man von einer ganzen Zahl die Kubikwurzel ausgezogen hat, noch ein Rest bleibt; so kann man aus vorigem Grunde, diesem Reste drey Nullen, den gefundenen Ganzen der Kubikwurzel aber das Zeichen der Einheit nachschreiben, und die Rechnung, soweit man will, fortsetzen.

So wird

$$\begin{array}{lll}
\sqrt[3]{10} = 2.154 \text{ ꝛc.} & & \\
\underline{8} & & \\
2000 & : & 1200,\ 3a^2 \\
 & & 60,\ 3ab \\
 & & 1,\ b^2 \\
\underline{1261} = \overline{1261} \times 1 & & \\
739000 & : & 132300,\ 3a^2 \\
 & & 3150,\ 3ab \\
 & & 25,\ b^2 \\
\underline{677375} = \overline{135475} \times 5 & & \\
61625000 & : & 13867500,\ 3a^2 \\
 & & 25800,\ 3ab \\
 & & 16,\ b^2 \\
\underline{55573264} = \overline{13893316} \times 4 & & \\
6051736 & &
\end{array}$$

Ist der gegebene Würfel ein Bruch; so kann man die Kubikwurzel des Zählers durch die Kubikwurzel des Nenners dividiren, oder leichter, den Bruch in Zehntheilchen auflösen, und wie zuvor verfahren.

So wird $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$. Oder

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{0.216} = 0.6 = \frac{3}{5}.$$

237. Ist der gegebene Würfel eine ganze genannte Zahl; so kann man, wie bey ungenannten Zahlen verfahren, und, wenn ein Rest bleibt, die Rechnung durch Zehntheilchen fortsetzen, und diese am Ende in die gewöhnlichen Theile der genannten Einheit verwandeln.

So

So wird 1tens

$\sqrt[3]{4^\circ} = 1^\circ.5874$ ꝛc.

1

$3000 \; : \; 300, \; 3a^2$
$150, \; 3ab$
$25, \; b^2$

$2375 = 475 \times 5$

$625000 \; : \; 67500, \; 3a^2$
$3600, \; 3ab$
$64, \; b^2$

$569312 = 71164 \times 8$

$55688000 \; : \; 7489200, \; 3a^2$
$33180, \; 3ab$
$49, \; b^2$

$52657003 = 7522429 \times 7$

$3030997000 : 755570700, \; 3a^2$

2tens $1^\circ.5874 = 1^\circ \; 3^{I} \; 6^{II} \; 3^{III} \; 6^{IIII}$ ꝛc.

$3^{I}.5244$
10488

$6^{II}.2928$
5856

$3^{III}.5136$
10272

$6^{IIII}.1632$

also $\sqrt[3]{4^\circ} = 1^\circ \; 3^{I} \; 6^{II} \; 3^{III} \; 6^{IIII}$ ꝛc.

Will man lieber für die Wurzel sogleich die gewöhnlichen Theile der Einheit finden, so darf man nur vor dem Dividiren, den Rest der ganzen in die höchsten Theile der Einheit, jenen der höchsten Theile der Einheit in die nächstniedrigern u. s. f. verwandeln, und wieder wie sonst verfahren.

Die-

Diesemnach wird

$$\sqrt[3]{4^{\circ}\ 0^{I}\ 0^{II}\ 0^{III}\ 0^{IIII}} = 1^{\circ}\ 3^{I}\ 6^{II}\ 3^{III}\ \text{ꝛc.}$$

$$\begin{array}{lcl}
1 & & \\
\hline
3\ 0\ 0\ 0\ 0 & : & 3^{\circ}\ 0^{I}\ 0^{II}\ 0^{III},\ 3a^{2} \\
 & & 1\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ ,\ 3ab \\
 & & 0\ \ 1\ \ 6\ \ 0\ ,\ b^{2} \\
\hline
2\ 2\ 3\ 0\ 0 & = & 4\ \ 4\ \ 6\ \ 0 \times 3^{I} \\
\hline
0\ 3\ 9\ 0\ 0 & : & 6^{\circ}\ 4^{I}\ 6^{II}\ 0^{III},\ 3a^{2} \\
 & & 0\ \ 2\ \ 3\ \ 0\ ,\ 3ab \\
 & & 0\ \ 0\ \ 0\ \ 6\ ,\ b^{2} \\
\hline
0\ 3\ 6\ 9\ 6 & = & 7\ \ 0\ \ 9\ \ 6 \times 6^{II} \\
\hline
0\ 0\ 2\ 2\ 6 & : & 7^{\circ}\ 3^{I}\ 1^{II}\ 6^{III},\ 3a^{2}
\end{array}$$

Diese zwo Methoden lassen sich gleichfalls anwenden, wenn der gegebene Würfel aus Ganzen und verschiedenen Theilen der Einheit besteht. Da aber für die erstere die Theile der Einheit vorläufig in Zehntheilchen zu verwandeln sind; so wird solche viel schwerer als die letztere.

So findet man nach der ersten Methode

$$\sqrt[3]{15^{\circ}\ 3^{I}\ 9^{II}} = \sqrt[3]{15^{\circ}\tfrac{45}{72}} = \sqrt[3]{15^{\circ}.625} = 2^{\circ}.5$$

$$\begin{array}{lcl}
8 & & \\
\hline
7625 & : & 1200,\ 3a^{2} \\
 & & 300,\ 3ab \\
 & & 25,\ b^{2} \\
\hline
7625 & = & 1525 \times 5 \\
\hline
0 & &
\end{array}$$

oder nach der zwoten Methode

$$\sqrt[3]{15^{\circ}\ 3^{I}\ 9^{II}} = 2^{\circ}\ 3^{I}$$

$$\begin{array}{lcl}
8 & & \\
\hline
7\ \ 3\ \ 9 & : & 12^{\circ}\ 0^{I}\ 0^{II},\ 3a^{2} \\
 & & 3\ \ 0\ \ 0\ ,\ 3ab \\
 & & 0\ \ 1\ \ 6\ ,\ b^{2} \\
\hline
7\ \ 3\ \ 9 & = & 15\ \ 1\ \ 6 \times 3^{I} \\
\hline
0 & &
\end{array}$$

Wenn

Wenn der gegebene Würfel keine Ganzen enthält; so kann man denselben mit einer Kubikzahl 8 oder 27 multipliciren, von diesem Producte die Kubikwurzel ausziehen, und diese wieder durch die Kubikwurzel 2 oder 3 jener Zahl 8 oder 27 dividiren. Denn es ist allgemein $\sqrt[3]{a^3 b} = a\sqrt[3]{b}$. Diesemnach wird

$$\sqrt[3]{0^{\circ}\ 4^{\text{I}}\ 7^{\text{II}}\ 5^{\text{III}}\ 6^{\text{IIII}}} = \frac{\sqrt[3]{0^{\text{I}}\ 4^{\text{I}}\ 7^{\text{II}}\ 5^{\text{III}}\ 6^{\text{IIII}} \times 8}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{6^{\circ}\ 0^{\text{I}}\ 11^{\text{II}}\ 8^{\text{III}}}}{2} = \frac{1^{\circ}\ 5^{\text{I}}}{2} = 0^{\circ}\ 5^{\text{I}}\ 6^{\text{II}}$$

$$\begin{array}{l}
\quad 1 \\
\overline{5 \quad 0 \quad 11 \quad 8} : 3^{\circ}\ 0^{\text{I}}\ 0^{\text{II}};\ 3a^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2 \quad 3 \quad 0,\ 3ab \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \quad 4 \quad 2,\ b^2 \\
\underline{5 \quad 0 \quad 11 \quad 8} = \overline{6 \quad 1 \quad 2} \times 5^{\text{I}} \\
\qquad 0
\end{array}$$

Von

Von der Trigonometrie.

238.

Die Trigonometrie lehrt aus soviel in Zahlen gegebenen Seiten und Winkeln, als ein Dreyeck bestimmen, alle übrigen Seiten und Winkel durch Rechnung finden. Es wird nämlich alles dasjenige, was man in der Geometrie durch die Zeichnung der Dreyecke erhält, in der Trigonometrie durch die Rechnung bestimmt.

Von den trigonometrischen Funktionen.

Fig. 473. 239. Zieht man durch das eine End a des Bogens ad einen Durchmesser ab, und durch das andere End d auf ab die Senkrechte df; so heißt diese der **Sinus** des Bogens ad oder des Winkels acd. Ebenso wird die auf den Durchmesser ab Senkrechte gk der Sinus des Bogens ag, oder des Winkels acg.

Zieht man ferner durch das eine End a des Bogens ad auf den Durchmesser ab die Senkrechte eh, und durch das andere End d und den Mittelpunkt c die Gerade cd, bis sie die Senkrechte eh in einem Punkte e begegnet; so heißt ae die **Tangente**, und ce die **Sekante** des Bogens ad oder des Winkels acd. Ebenso wird ah die Tangente und ch die Sekante des Bogens ag oder des Winkels acg.

Wächst der Bogen ad, so wächst auch sein Sinus, seine Tangente und Sekante, bis der Bogen $= 90°$ ist, wo seine Tangente und Sekante unendlich groß, sein Sinus aber dem Halbmesser gleich wird. Nimmt der Bogen ad ab, so nehmen auch sein Sinus, seine Tangente und seine Sekante bis auf den Bogen $= 0$ ab, wo der Sinus und die Tangente $= 0$, die Sekante aber dem Halb-

Halbmesser gleich wird. Wächst endlich der Bogen über 90°; so nehmen sein Sinus, seine Tangente und Sekante bis auf den Bogen = 180° ab, wo der Sinus und die Tangente wieder = 0, die Sekante aber dem Halbmesser gleich wird.

Der **Kosinus**, die **Kotangente** und **Kosekante** eines Bogens ad ist nichts anders als der Sinus, die Tangente und Sekante seines Komplements dl.

Zieht man also dm und lo senkrecht auf cl; so sind dm, lo und co der Sinus, die Tangente und Sekante des Bogens dl, folglich der Kosinus, die Kotangente und Kosekante des Bogens ad: und zieht man gm und ln senkrecht auf cl; so sind gm, ln und cn der Sinus die Tangente und Sekante des Bogens gl, folglich der Kosinus, die Kotangente und Kosekante des Bogens ag, dessen Komplement gl ist.

Weil das Komplement von 0° = 90° ist; so wird der Kosinus und die Kotangente von 90° = 0, die Kosekante aber dem Halbmesser gleich, und die Kotangente und Kosekante vom 0° unendlich groß, der Kosinus aber dem Halbmesser gleich. Uebrigens wachsen der Kosinus, die Kotangente und Kosekante, wenn ihr Bogen unter 90° abnimmt, oder wenn ihr Bogen über 90° wächst und umgekehrt.

Der Sinus, die Tangente und Sekante, oder auch der Kosinus, die Kotangente und Kosekante eines Bogens, werden gemeinschäftlich die **Funktionen** desselben genennt.

240. Wenn man aus dem Scheitel eines Winkels pcq mit zweenen verschiedenen Halbmessern ca und cq die Bögen ad und qm beschreibt; und ihre Funktionen zieht; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke bac und pqc, dec und mnc: Fig. 474.

$$ba : pq = ca : cq$$
$$bc : pc = ca : cq \text{ und}$$
$$de : mn = dc : mc \text{ oder}$$
$$de : mn = ca : cq.$$

Die gleichnamigen Funktionen desselben Winkels in verschiedenen Kreisen verhalten sich also wie die Halbmesser dieser Kreise.

Fig. 475. 241. Zieht man was immer für zwo gleichnamige Funktionen de und mn der Bögen ad und qm, und was immer für zwo gleichnamige ba und pq der Bögen ar und qo; so verhält sich nach Vorigem:

de : mn = ca : cq und
ba : pq = ca : cq, also auch
de : mn = ba : pq oder
de : ba = mn : pq.

Jede zwo Funktionen von was immer für zween Winkel in einem Kreise verhalten sich also wie die gleichnamigen Funktionen derselben Winkel in jedem andern Kreise.

Berechnet man daher die Funktionen aller Bögen von Minute zu Minute für einen Kreis eines beliebigen Halbmessers; so geben diese berechneten Funktionen das Verhältniß der Funktionen ebenjener Bögen für den Kreis eines jeden andern Halbmessers.

Von der Berechnung der trigonometrischen Funktionen.

242. Sind einmal die Sinusse, Tangenten und Sekanten aller Bögen berechnet; so hat man auch den Kosinus, die Kotangente und Kosekante eines jeden Bogens; indem diese Funktionen mit dem Sinus, der Tangente und Sekante seines Komplements einerley sind.

Fig. 473. 243. Ist ad + ag = 180°, so ist ad = gb; also haben die rechtwinklichten Dreyecke gck und dcf die spitzen Winkel bey c und die Hypothenusen cd und cg gleich, folglich sind es auch die Katheden df und gk.

Ferner

Ferner ist der Winkel ach = bcg = acd; folglich haben die rechtwinklichten Dreyecke ach und ace die spitzen Winkel bey c gleich, und die Kathede ac gemein, also sind auch die Katheden ah und ae und die Hypothenusen ch und ce gleich. Endlich ist ld = lg; also wie zuvor gm = dm, ln = lo und cn = co.

Wenn also zween Bögen ad und ag zusammen 180° ausmachen; so sind alle ihre gleichnamigen Funktionen gleich.

Sind folglich die Funktionen aller spitzen Bögen einmal berechnet; so hat man auch die Funktionen eines jeden stumpfen.

244. Ist der Halbmesser ca und die Tangente ae eines jeden Bogens ad gegeben; so findet man wegen des bey a rechtwinklichten Dreyeckes eac die Sekante ce, wenn man das Quadrat des Halbmessers ca zu dem Quadrate der Tangente ae addirt, und aus der Summe dieser Quadrate die Wurzel auszieht: sodann erhält man den Sinus df, wenn man wegen der ähnlichen Dreyecke cae und cfd sagt: **es verhält sich die Sekante ce zu der Tangente ae, wie der Halbmesser cd zu dem Sinus df.** Fig. 473.

Sind also die Tangenten aller Bögen von 0 an bis auf 90° einmal berechnet; so kann man auch die Sekante und den Sinus eines jeden finden.

245. Weil ae mit cl gleichläuft, so sind die Winkel aec und ecl gleich, also die rechtwinklichten Dreyecke aec und ocl ähnlich; folglich verhält sich: Fig. 473.

ae : ac = cl : lo oder

ae : ac = ac : lo; also ist

$ac^2 = ae \times lo$.

Daher ist das Quadrat des Halbmessers allemal dem Rechtecke unter der Tangente und Kotangente eines jeden Bogens gleich.

Dividirt man also das Quadrat des Halbmessers durch die Tangente eines Bogens; so ist der Quotient die Tangente des Komplements ebendieses Bogens.

Sid folglich die Tangenten aller Bögen von Minute zu Minute bis auf 45° einmal berechnet; so findet man durch jene Division auch die Tangenten aller Bögen von 45 bis auf 90 Grade; indem ein jeder aus diesen Bögen allemal das Komplement von einem aus jenen ist.

Fig. 476. 246. Sind nebst dem Halbmesser ac die Tangenten ag und af der Bögen ad und ab gegeben, und die Gerade ch halbirt den Bogen bd in e; so halbirt sie auch den Winkel gcf; folglich verhält sich nach Nro. 17.

$$fc : cg = fh : hg, \text{ also auch}$$

$$fc + cg : cg = fg : gh.$$

Sucht man also fc und gc nach Nro. 244: so erhält man durch die letztere Proportion die Gerade gh, welche zu ag addirt die Tangente ah des Bogens ae giebt.

Man findet daher aus dem Halbmesser und den gegebenen Tangenten zweener spitzen Bögen die Tangente des mittlern arithmetisch-proportionirten Bogens, wenn man die Sekanten jener Bögen sucht und sagt: **er verhält sich die Summe der Sekanten zu der kleinern Sekante, wie der Unterscheid der gegebenen Tangenten zu jenem Stücke, welches zur kleinern Tangente addirt, die Tangente des mittlern arithmetisch-proportionirten Bogens giebt.**

Fig. 476. 477. Wird der Bogen ad = o; so wird ae die Hälfte von ab, die Tangente ag = o, die Sekante cg dem Halbmesser ca, die Gerade fg der Tangente fa und die Gerade hg der Tangente ha gleich: also wird die allgemeine Proportion

$$fc + cg : cg = fg : gh$$

für diesen Fall in folgende

$$fc + ca : ca = fa : ha \text{ verwandelt.}$$

Daher

Daher findet man aus dem Halbmesser ca und der gegebenen Tangente af eines Bogens ab die Tangente ah des halben Bogens ae, wenn man die Sekante des ganzen Bogens sucht und sagt: **es verhält sich diese Sekante mehr dem Halbmesser, zu dem Halbmesser, wie die gegebene Tangente zu der gesuchten.** Fig. 477.

Weil in diesem Falle die Gerade ch den Winkel c des Dreyeckes acf halbirt; so folgt auch hieraus die Proportion Fig. 477.

$$fc + ca : ca = fa : ha.$$

Ist der Bogen $ab = 90°$, so wird die Sekante cf, die Tangente af, und der Unterscheid gf der Tangenten ag und af unendlich groß, also die allgemeine Proportion Fig. 476. 478.

$$fc + cg : cg = fg : gh$$

in diese $\infty : gc = \infty : gh$

verwandelt.

Daher findet man die Tangente ah des Bogens ae, wenn man die kleinere Sekante cg sucht, und zu der gegebenen Tangente ag des kleinern Bogens ad addirt. Fig. 478.

Weil af und cf gleichlaufen; so ist der Winkel $ahc = hcf = hcg$, folglich das Dreyeck hgc gleichschenklich, also die Auflösung des letztern Falles auch aus diesem Grunde richtig.

Wird endlich $ab = 90°$ und $ad = 0°$, so wird $ae = 45°$, die Sekante cf, die Tangente af und der Unterscheid gf der Tangenten ag und af unendlich groß, die Tangente $ag = 0$ und die Sekante cg dem Halbmesser ca gleich, also die allgemeine Proportion Fig. 476. 479.

$$fc + cg : cg = fg : gh$$

in diese $\infty : ac = \infty : ah$ verwandelt.

Folglich ist die Tangente ah von 45° dem Halbmesser gleich.

Weil der Winkel c des rechtwinklichten Dreyeckes $hac = 45°$ ist; so wird der Winkel $h = c$, also das Fig. 479.

Dreyeck

Dreyeck gleichschenklicht; folglich ist der letzte Satz auch aus diesem Grunde richtig.

Fig. 480. 247. Stellen ab, ac und ad die Längen dreyer spitzen Bögen, welche sehr wenig voneinander unterschieden sind, und die Senkrechten bf, cg und dh drey gleichnamige Funktionen (Sinusse, Tangenten oder Sekanten) ebendieser Bögen vor; so kann die Linie, welche die Punkte f, h, g zusammenhänget, weil sie sehr klein ist, allemal ohne merklichen Fehler als eine gerade angesehen werden.

Zieht man also fn gleichlaufend mit bc; so sind die Dreyecke fng und fmh ähnlich; also verhält sich

$$fn : fm = ng : mh, \text{ oder}$$
$$bc : bd = ng : mh.$$

Wenn also zwo gleichnamige Funktionen bf und cg (Sinusse, Tangenten oder Sekanten) zweyer spitzen sehr wenig voneinander unterschiedenen gegebenen Bögen ab und ac bekannt sind; so findet man die gleichnamige Funktion dh eines jeden mittlern gegebenen Bogens ad, wenn man die Unterscheide bc und bd der Bögen und jene ng und mh ihrer Funktionen als proportionirt ansieht, und sagt: **es verhält sich der Unterscheid** bc **des großen und kleinen Bogens zu dem Unterscheide** bd **des kleinen und mittlern Bogens, wie der Unterscheid** ng **der Funktionen der zween ersten zu dem Unterscheide** mh **der Funktionen der zween letzten Bögen**, und sodann das gefundene vierte Glied zu der Funktion des kleinern Bogens addirt.

Ferner verhält sich

$$ng : mh = bc : bd.$$

Sind also zween sehr wenig voneinander unterschiedene Bögen ab und ac nebst ihren gleichnamigen Funktionen, (Sinussen, Tangenten oder Sekanten) bf und cg gegeben: so findet man abermal den Bogen einer jeden gegebenen mittlern Funktion dh, wenn man sagt: **es verhält sich der Unterscheid** ng **der großen und kleinen**

nen

nen Funktion zu dem Unterscheide mh der kleinen und mittlern Funktion, wie der Unterscheid bc der Bögen jener zwo Funktionen zu dem Unterscheide bd der Bögen dieser zwo Funktionen, und sodann noch das gefundene vierte Glied zu dem Bogen der kleinen Funktion addirt.

Dieses Verfahren heißt **Interpoliren.** Es läßt sich auch auf die Zahlen und ihre Logarithmen anwenden: denn stellen die Geraden ab, ac und ad die Zahlen, und die Senkrechten bf, cg und dh ihre Logarithmen vor; so kann man übrigens wie zuvor schließen.

248. Ist nun der Halbmesser eines Kreises gegeben, und man soll die Tangente von was immer für einem in Graden und Minuten gegebenen Bogen, der zwischen 0° und 45° liegt, finden; so sucht man nach Nro. 246. die Tangente des mittlern arithmetisch-proportionirten Bogens zwischen 0° und 45°; sodann die Tangente des mittlern arithmetisch-proportionirten Bogens zwischen jenen zweenen, deren Tangenten itzt bekannt sind, und die dem gegebenen am nächsten kommen, und so fort, bis man endlich auf die Tangente des gegebenen Bogens selbst kömmt, oder die Tangenten von Bögen findet, welche so wenig von dem gegebenen unterschieden sind, daß man nach Nro. 247. verfahren kann.

Soll man z. B. die Tangente des Bogens 27° 43' für den Halbmesser 1000000000 finden; so kann man nach der Ordnung, welche folgende Tabelle weiset, zu Werke gehen.

Bögen.		Tangenten	Bögen.		Tangenten.
I.			VII.		
45°	0'	1000000000	28°	$7\frac{1}{2}$	534511135
22	30	414213562	27	$46\frac{13}{32}$	526647881
0	0	0	27	$25\frac{5}{16}$	518835284
II.			VIII.		
45	0	1000000000	27	$46\frac{13}{32}$	526647881
33	45	66817863[illegible]	27	$35\frac{55}{64}$	522735318
22	30	414213562	27	$25\frac{5}{16}$	518835284
III.			IX.		
33	45	668178637	27	$46\frac{13}{32}$	526647881
28	$7\frac{1}{2}$	534511135	27	$41\frac{17}{128}$	524690025
22	30	414213582	27	$35\frac{55}{64}$	522735318
IV.			X.		
28	$7\frac{1}{2}$	534511135	27	$46\frac{13}{32}$	526647881
25	$18\frac{3}{4}$	472964775	27	$43\frac{197}{256}$	525668558
22	30	414213562	27	$41\frac{17}{128}$	524690025
V.			XI.		
28	$7\frac{1}{2}$	534511135	27	$43\frac{197}{256}$	525668558
26	$43\frac{1}{8}$	503357798	27	$42\frac{231}{512}$	525179192
25	$18\frac{3}{4}$	472964775	27	$41\frac{17}{128}$	524690025
VI.			XII.		
28	$7\frac{1}{2}$	534511135	27	$43\frac{197}{256}$	525668558
27	$25\frac{5}{16}$	518835284	27	43	525382913
26	$43\frac{1}{8}$	503357798	27	$42\frac{231}{512}$	525179192

Dieses Verfahren kürzet sich von selbsten ab, jemehr man schon Tangenten berechnet hat, indem zur Berechnung einer jeden allemal die nächst größeren und die nächst kleineren aus den schon gefundenen wieder dienen können.

Sind die Tangenten aller Bögen unter 45° einmal berechnet; so findet man nach Nro. 245. jene der Bögen von 45° bis auf 90°, und jedesmal nach Nro. 244. auch die Secante und den Sinus eines jeden Bogens.

End.

Endlich können nach Nro. 223. auch die Logarithmen aller Funktionen eines jeden Bogens berechnet werden.

249. Die Funktionen aller Bögen von Minute zu Minute bis auf 90°, und die Logarithmen aller jener Funktionen sind schon längst für den Halbmesser 10 000 000 000 berechnet und zum allgemeinen Gebrauche in eine Tabelle zusammengetragen worden, doch so, daß man die drey letztern Ziffern der Funktionen ohne ihre Logarithmen zu ändern, wieder weg ließ. So sind alle Funktionen durch 1000 dividirt und der Rest, welcher allemal kleiner als $\frac{1}{10000000}$ ist vernachläßiget worden. In der Tabelle der Funktionen vom **Herrn Obristwachtmeister Unterberger**, deren wir uns bedienen, sind die fünf letzten Ziffern weggelassen, folglich wird der Halbmesser = 100000.

Die Logarithmen gehören also zwar nicht mehr zu den Zahlen, welche in der Tabelle die Funktionen vorstellen; sie gehören aber zu Zahlen, welche das Verhältniß der Funktionen noch besser als jene ausdrücken. Folglich können die Logarithmen selbst als Funktionen betrachtet werden.

Jede Tabelle der Funktionen ist so angeordnet, daß die Bögen oder Winkel auf einer Seite von 0 Minuten, und auf der andern von 90 Geraden anfangen, auf jener Seite immer um eine Minute wachsen, und auf dieser um eine Minute abnehmen, folglich die Funktionen eines jeden Bogens auf der einen, und die Funktionen seines Komplementes in gerader Linie auf der andern Seite stehen.

Von dem Gebrauche der Tabelle der Funktionen.

250. Ist ein spitzer Winkel in Graden und Minuten gegeben; so findet man alle seine Funktionen (Sinusse, Tangenten oder Sekanten) in der Tabelle ausgesetzet: und enthält der gegebene Winkel auch Sekunden; so sagt man nach Nro. 247. **es verhalten sich 60 Sekunden zu den Sekunden des gegebenen Winkels, wie der Unterscheid der nächst größern und nächst kleinern Funktion zu dem vierten Gliede, welches zu der nächst kleinern Funktion addirt die verlangte giebt.** Soll man den Kosinus, die Kotangente oder Kosekante eines gegebenen Winkels suchen; so sucht man den Sinus, die Tangente, oder Sekante seines Komplements.

Ist endlich der gegebene Winkel ein stumpfer; so findet man nach Nro. 243. jede aus seinen Funktionen, wenn man ihn von 180° abzieht, und die gleichnamige Funktion des Unterscheides sucht.

Soll man z. B. den Sinus des Winkels 53° 51′ 20″ suchen, so ist

Sin. 53° 52′ = 80765
Sin. 53° 51′ = 80748

ihr Unterscheid = 17;
also verhält sich
60″ : 20″ = 17 : 6
Es ist aber
Sin. 53° 51′ = 80748
also Sin 53° 51′ 20″ = 80754

Soll man den Kosinus von 53° 51′ 20″ suchen; so ist sein Komplement = 36° 8′ 40″

Sin. 36° 9′ = 58990
Sin. 36° 8′ = 58967

ihr Unterscheid =....23;

also

also verhält sich

$60'' : 40'' = 23 : 15$

Es ist aber

Sin. 36° 8' = 58967

also Kos. 53° 51' 20'' = 58982.

Mit den Logarithmen der Funktionen kann man ebenso verfahren.

Soll z. B. Log. Tang. 53° 51' 20'' gesucht werden; so ist der Unterscheid des nächst größern und nächst kleinern Logarithme = 2652; also verhält sich

$60'' : 20'' = 2652 : 884$

Es ist aber

Log. Tang. 53° 51' = 10.1363500

also Log. Tang. 53° 51' 20'' = 10.1364384.

Soll man endlich Log. Kot. 53° 51' 20'' suchen; so ist sein Komplement = 36° 8' 40'', und der Unterscheid des nächst größern und nächst kleinern Logarithme = 2652; also verhält sich

$60'' : 40'' = 2652 : 1768$

Es ist aber

Log. Tang. 36° 8' = 9.8633848

also Log. Kot. 53° 51' 20'' = 9.8635616.

251. Ist die Funktion (der Sinus, die Tangente oder Sekante) gegeben, und man soll den ihr zugehörigen spitzen und stumpfen Winkel finden; so schlägt man solche in der Reihe ihrer gleichnamigen Funktionen der Tabelle auf, und sagt; wofern sie nicht darinn enthalten ist nach Nro 247.: **es verhält sich der Unterschied der nächst größern und nächst kleinern Funktion zu dem Unterscheide der gegebenen und nächst kleinern, wie 60'' zu den Sekunden, welche zu dem Winkel der nächst kleinern Funktion addirt den verlangten spitzen Winkel giebt;** und zieht man diesen von 180° ab; so erhält man auch den stumpfen.

Betrachtet man den gegebenen Kosinus, die Kotangente oder Kosekante als einen Sinus, eine Tangente oder Sekante, und sucht den spitzen Winkel, welcher dieser Funktion zugehört; so giebt dieser Winkel von 90° abgezogen, und zu 90° addirt den verlangten spitzen und stumpfen Winkel der gegebenen Funktion.

Soll man z. B. den Winkel von dem Sinus 72248 suchen, so ist der Unterscheid des nächst größern und nächst kleinern = 21, und jener des gegebenen und nächst kleinern = 12; also verhält sich

$21 : 12 = 60'' : 34''$.

Es ist aber nach der Tabelle

72236 = Sin. 46° 15'
also 72248 = Sin. 46° 15' 34''
oder 72248 = Sin. 133° 44' 26''.

Ist der Winkel von dem Kosinus 72248 zu suchen; so findet man wie zuvor

72248 = Sin. 46° 15' 34''

also (dieser Winkel von 90° abgezogen und zu 90° addirt)

72248 = Kos. 43° 44' 26''
oder 72248 = Kos. 136° 15' 34''.

Soll der Winkel von dem Log. Sin. 9.6979899 gefunden werden; so ist der Unterscheid des nächst größern und nächst kleinern Logarithme = 2195 und jener des gegebenen und nächst kleinern = 1158 also verhält sich

$2195 : 1158 = 60'' : 31''$.

Es ist aber nach der Tabelle

9.6978741 = Log. Sin 29° 55'
also 9.6979899 = Log. Sin. 29° 55' 31''
oder 9.6979899 = Log. Sin. 150° 4' 29''.

Ist der Winkel von dem Log. Kos. 9.6979899 zu suchen; so findet man wie zuvor

9.6979899 = Log. Sin. 29° 55' 21''

also (dieser Winkel von 90° abgezogen und zu 90° addirt)

9.6979899 = Log. Kos. 60° 4' 29''
oder 9.6979899 = Log. Kos. 119° 55' 31''.

Ist

Ist der Log. Tang. 8.9653287 gegeben, und man soll den Winkel suchen; so ist der Unterscheid des nächst größern und nächst kleinern Logarithme = 13800, und jener des gegebenen und nächst kleinern = 6899; also verhält sich

$$13800 : 6899 = 60'' : 30''.$$

Es ist aber nach der Tabelle

8.9646388 = Log. Tang. 5° 16'

also 8.9653287 = Log. Tang. 5° 16' 30''

oder 8.9653287 = Log. Tang. 174° 43' 30''.

Soll man den Winkel von dem Logarith. Kotang. 8.9653287 suchen; so findet man wie zuvor

8.9653287 = Log. Tang. 5° 16' 30''

also (dieser Winkel von 90° abgezogen und zu 90° addirt)

8.9653287 = Log. Kot. 84° 43' 30''

oder 8.9653287 = Log. Kot. 95° 16' 30''.

Von der Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke.

252. Wenn man in einem rechtwinklichten Dreyecke abc aus c mit dem Halbmesser ca einen Bogen an beschreibt; so wird ab der Sinus des Winkels c oder der Kosinus des Winkels a, der mit c allemal 90° ausmacht: und beschreibt man aus a mit demselben Halbmesser ac einen Bogen cm; so wird bc der Sinus des Winkels a und der Kosinus des Winkels c. Fig. 481.

Da nun nach Nro. 241. jede zwo Funktionen was immer für zweener Winkel in einem Kreise sich wie die gleichnamigen Funktionen derselben Winkel in jedem andern Kreise verhalten; so verhalten sich auch diese Funktionen der Winkel c und a in dem Kreise von dem Halbmesser ac wie die berechneten gleichnamigen Funktionen ebendieser Winkel in dem Kreise von dem Halbmesser der Tabelle.

In

In jedem rechtwinklichten Dreyecke verhält sich also 1tens die Hypothenuse zu einer Kathede, wie der Halbmesser zu dem Sinus des Winkels, welcher dieser Kathede entgegensteht, oder zu dem Kosinus des Winkels, welcher an dieser Kathede liegt: und 2tens verhalten sich die Katheden wie die Sinusse ihrer entgegengesetzten, oder wie die Kosinusse ihrer anliegenden Winkel.

Fig. 482. Beschreibt man aus c mit dem Halbmesser b c einen Bogen b n; so wird a b die Tangente des Winkels c und die Kotangente des Winkels a: und beschreibt man aus a mit dem Halbmesser a b einen Bogen b m; so wird b c die Tangente des Winkels a und die Kotangente des Winkels c.

Daher verhält sich in jedem rechtwinklichten Dreyecke 3tens eine Kathede zur andern, wie der Halbmesser zu der Tangente des Winkels, welcher der zwoten entgegensteht, oder zu der Kotangente des Winkels, welcher an der zwoten liegt.

253. Ein rechtwinklichtes Dreyeck wird nach Nro. 44. Meßk. 1ten Theil bestimmt:

1tens durch die Hypothenuse und einen spitzen Winkel,
2tens durch eine Kathede und einen spitzen Winkel,
3tens durch die Hypothenuse und eine Kathede,
4tens durch die beeden Katheden.

Fig. 481. 482. Sind nun diese Stücke eines rechtwinklichten Dreyeckes gegeben; so findet man im ersten Falle 1tens den unbekannten spitzen Winkel, wenn man den gegebenen von 90° abzieht, sodann 2tens jede Kathede, wenn man sagt: es verhält sich der Halbmesser zur Hypothenuse, wie der Sinus eines spitzen Winkels zu der entgegengesetzten Kathede.

Im zweyten Falle findet man 1tens den unbekannten spitzen Winkel wie zuvor, sodann 2tens die Hypothenuse wenn man sagt: es verhält sich der Sinus des Winkels, welcher der gegebenen Kathede entgegensteht zu ebendieser Kathede, wie der Halbmesser zu der Hypothenuse. endlich

3tens die unbekannte Kathede, wenn man sagt: es verhält sich der Sinus des Winkels, welcher der gegebenen Kathede entgegensteht, zu ebendieser Kathede, wie der Sinus des Winkels welcher der unbekannten Kathede entgegengesetzet ist, zu ebendieser.

Im dritten Falle findet man 1tens den Winkel, welcher der gegebenen Kathede entgegensteht, wenn man sagt: es verhält sich die Hypothenuse zu dem Halbmesser, wie die gegebene Kathede zu dem Sinus des gesuchten Winkels, sodann 2tens den andern spitzen Winkel, wenn man den itzt gefundenen von 90° abzieht, endlich 3tens die unbekannte Kathede, wenn man sagt: es verhält sich der Halbmesser zur Hypothenuse, wie der Sinus des Winkels, welcher der gesuchten Kathede entgegensteht, zu ebendieser.

Im vierten Falle findet man 1tens einen spitzen Winkel, wenn man sagt: es verhält sich eine Kathede zu dem Halbmesser, wie die andere Kathede zu der Tangente des Winkels, welcher ebendieser entgegensteht, sodann 2tens den andern spitzen Winkel, wenn man den itzt gefundenen von 90° abzieht, endlich 3tens die Hypothenuse, wenn man sagt: es verhält sich der Sinus eines spitzen Winkels zu der entgegengesetzten Kathede, wie der Halbmesser zu der Hypothenuse.

Ist für den ersten Fall

$ac = 875$ Klafter

$a = 57°$

$b = 90°;$

so ist $c = 33°.$

Daher verhält sich 1tens

Halbm. : ac = Sin. c : ab.

Es ist aber

Log.

Log. Sin. 33° = 9.7361088
Log. 875 = 2.9420081

Summe = 12.6781169
Log. Halbm. = 10.0000000

folglich Log. a b = 2.6781169.

Der Unterschied des nächstgrößern und nächstkleinern = 9114, und jener des gegebenen und nächstkleinern = 5099; also

$ab = 476 \frac{5099}{9114} = 476°.55$

2tens verhält sich

Halbm. : ac = Sin. a : bc.

Es ist aber

Log. Sin. 57° = 9.9235914
Log. 875 = 2.9420081

Summe = 12.8655995
Log. Halbm. = 10.0000000

folglich Log. bc = 2.8655995.

Der Unterschied des nächstgrößern und nächstkleinern = 5921, und jener des gegebenen und nächstkleinern = 4955; also

$bc = 733 \frac{4955}{5921} = 733°.83.$

Ist für den zweyten Fall

ab = 69 Klafter
b = 90°
a = 54° 16';
so ist c = 35° 44'.

Daher verhält sich 1tens

Sin. c : ab = Halbm. : ac.

Es ist aber

Log. Halbm. = 10.0000000
Log. 69 = 1.8388491

Summe = 11.8388491
Log. Sin. 35° 44' = 9.7664229

folglich Log. ac = 2.0724262.

Der

Der Unterscheid des nächstgrößern und nächstkleinern = 36650, und jener des gegebenen und nächstkleinern = 5442; also

$$ac = 118 \tfrac{5442}{36650} = 118°.\ 15$$

2tens verhält sich

Sin. c : ab = Sin. a : bc.

Es ist aber

Log. Sin. 54° 16'	=	9.9094190
Log. 69	=	1.8388491
Summe	=	11.7482681
Log. Sin. 35° 44'	=	9.7664229
folglich Log. bc	=	1.9818452.

Der Unterscheid des nächstgrößern und nächstkleinern = 45476, und jener des gegebenen und nächstkleinern = 41216; also

$$bc = 95 \tfrac{41216}{45476} = 95°.90$$

Ist für den dritten Fall

ac = 627 Klafter
ab = 356 Klafter
b = 90°;

so verhält sich 1tens

ac : Halbm. = ab : Sin. c.

Es ist aber

Log. 356	=	2.5514500
Log. Halbm.	=	10.0000000
Summe	=	12.5514500
Log 627	=	2.7972675
folglich Log. Sin. c	=	9.7541825.

Der Unterscheid des nächstgrößern und nächstkleinern = 1831, und jener des gegebenen und nächstkleinern = 1368; daher verhält sich ferner

1831 : 1368 = 60° : 44″

also ist c = 34° 35' 44″ und
a = 55° 24' 16″.

2tens verhält sich

Halbm. : ac = Sin. a : bc.

Es ist aber

Log. Sin. 55° 24′ 16″ =	9.9154950
Log. 627 =	2.7972675
Summe =	12.7127625
Log. Halbm. =	10.0000000
folglich Log. bc =	2.7127625
und bc =	516°.13

Ist für den vierten Fall

ab = 476 Klafter
bc = 595 Klafter
b = 90°,

so verhält sich 1tens

bc : Halbm. = ab : Tang. c.

Es ist aber

Log. 476 =	2.6776070
Log. Halbm. =	10.0000000
Summe =	12.6776070
Log. 595 =	2.7745170
also Log. Tang. c =	9.9030900

c = 38° 39′ 35″ und
a = 51° 20′ 25″.

2tens verhält sich

Sin. c : ab = Halbm. : ac.

Es ist aber

Log. Halbm. =	10.0000000
Log. 476 =	2.6776070
Summe =	12.6776070
Log. Sin. 38° 39′ 35″ =	9.7956672
folglich Log. ac =	2.8819398
und ac =	761°.97

Jeder Fall ist allzeit möglich außer dem dritten, wenn die Hypothenuse kleiner als die gegebene Kathede ist.

Von

Von der Auflösung der Dreyecke überhaupt.

254. Jedes Dreyeck wird überhaupt nach Nro. 59. Meßk. 1. Theil bestimmt:

1tens durch eine Seite und zween Winkel,

2tens durch zwo Seiten und den Winkel, welcher der größern entgegengesetzet ist,

3tens durch zwo Seiten und den Winkel, welcher der kleinern entgegensteht, im Falle man weiß, ob die größere einem stumpfen oder einem spitzen Winkel entgegengesetzet ist,

4tens durch zwo Seiten und den eingeschlossenen Winkel,

5tens endlich durch alle drey Seiten.

255. Zieht man den Halbmesser c n senkrecht auf die Sehne a b; so wird die halbe Sehne b f der Sinus des Boges b n, oder des Winkels beym Umfange a e b, welcher den Bogen b n zum Maße hat, also auch des Winkels beym Umfange a d b, der mit a e b 180° ausmacht. Fig. 483.

Die halbe Sehne ist also allemal der Sinus eines jeden Winkels beym Umfange, welcher auf der Sehne ruht.

Ist der Winkel a d b ein rechter: so wird die Sehne dem Durchmesser, also sein Sinus wie oben dem Halbmesser gleich. Der Halbmesser wird ebendaher auch der ganze Sinus (Sinus totus) genennt, weil die Sinusse aller schiefen Winkel Brüche sind, sobald man den Halbmesser = 1 setzet. Fig. 484.

256. Umschreibt man jedem Dreyecke a d b einen Kreis; so wird nach Vorigem jede Seite des Dreyeckes dem doppelten Sinus des ihr entgegengesetzten Winkels gleich. Fig. 483.

Daher verhalten sich die Seiten eines jeden Dreyeckes wie die Sinusse der entgegengesetzten Winkel.

Fig. 485. 257. Sind also in jedem Dreyecke eine Seite und zween Winkel gegeben; so findet man 1tens den dritten Winkel, wenn man die Summe der zween gegebenen von 180° abzieht; sodann 2tens jede unbekannte Seite, wenn man sagt: **es verhält sich der Sinus des Winkels, welcher der gegebenen Seite entgegensteht, zu der gegebenen Seite, wie der Sinus des Winkels, welcher der gesuchten Seite entgegengesetzt ist, zu ebendieser.**

Ist z. B. ab = 876 Klafter
a = 127° 14′
b = 40° 33′;
so ist c = 12° 13′.

Daher verhält sich 1tens
Sin. c : ab = Sin. b : ac.

Es ist aber

Log. Sin. 40° 33′	=	9.8129878
Log. 876	=	2.9425041
Summe	=	12.7554919
Log. Sin. 12° 13′	=	9.3255344
also Log. ac	=	3.4299575.
und ac	=	2691°. 27

2tens verhält sich
Sin. c : ab = Sin. a : bc.

Es ist aber

Log. Sin. 127° 14′	=	9.9010102
Log. 876	=	2.9425041
Summe	=	12.8435143
Log. Sin. 12° 13″	=	9.3255344
also Log. bc	=	3.5179799
und bc	=	3295°. 94

Fig. 486. 258. Sind in jedem Dreyecke zwo Seiten und der Winkel, welcher der größern entgegensteht, gegeben; so findet man 1tens den Winkel, welcher der kleinern entgegensteht, wenn man sagt: **es verhält sich die**

grö=

größere Seite zu dem Sinus des gegebenen Winkels, wie die kleinere Seite zu dem Sinus des gesuchten, sodann 2tens den dritten Winkel, wenn man die Summe der zween bekannten von 180° abzieht, endlich 3tens die dritte Seite, wenn man sagt: es verhält sich der Sinus des gegebenen Winkels zu der entgegengesetzten Seite, wie der Sinus des Winkels, welcher der unbekannten Seite entgegensteht, zu ebendieser.

Ist z. B. bc = 1056 Klafter
ab = 567 Klafter
und a = 30° 15';

so verhält sich 1tens

bc : Sin. a = ab : Sin. c.

Es ist aber

Log. 567	=	2.7535831
Log. Sin. 30° 15'	=	9.7022357
Summe	=	12.4558188
Log. 1056	=	3.0236639
also Log. Sin. c	=	9.4321549

c = 15° 41' 37'',
b = 134° 3' 23''.

Weil der Winkel c der kleinern Seite ab entgegensteht; so ist er allzeit spitz zu nehmen.

2tens verhält sich

Sin a : bc = Sin. b : ac.

Es ist aber

Log. Sin. 134° 3' 23''	=	9.8565209
Log. 1056	=	3.0236639
Summe	=	12.8801848
Log. Sin. 30° 15'	=	9.7022357
also Log. ac	=	3.1779491
und ac	=	1506°. 43.

Fig. 487. 488. 259. Sind zwo Seiten und der Winkel, welcher der kleinern entgegensteht, gegeben, und man weiß, ob der Winkel, welcher der größern entgegensteht, ein spitzer oder stumpfer ist; so findet man 1tens den Winkel welcher der größern Seite entgegengesetzet ist, wenn man sagt: **es verhält sich die kleinere Seite zu dem Sinus des gegebenen Winkels, wie die größere Seite zu dem Sinus des gesuchten**, und diesen wie vorausgesetzt spitz oder stumpf nimmt, sodann 2tens den dritten Winkel, wenn man die Summe der zween bekannten von 180° abzieht, endlich 3tens die dritte Seite, wenn man sagt: **es verhält sich der Sinus des gegebenen Winkels zu der entgegengesetzten Seite, wie der Sinus des Winkels, welcher der gesuchten Seite entgegensteht, zu ebendieser.**

Fig. 487. Ist z. B. $bc = 1621$ Klafter

$ab = 594$ Klafter

$c = 13° \; 7'$,

und $a > 90°$;

so verhält sich 1tens

$ab : \text{Sin. } c = bc : \text{Sin. } a.$

Es ist aber

Log. 1621	=	3.2097830
Log. Sin. 13° 7′	=	9.3559007
Summe	=	12.5656837
Log. 594	=	2.7737864
also Log. Sin. a	=	9.7918973
a	=	141° 44′ 8″,
und b	=	25° 8′ 52″.

2tens verhält sich

$\text{Sin. } c : ab = \text{Sin. } b : ac.$

Es ist aber

Log.

Log. Sin. $25° 8' 52'' = 9.6283423$
Log. $594 = 2.7737864$
Summe $= 12.4021287$
Log. Sin. $13° 7' = 9.3559007$
also Log. $ac = 3.0462280$
und $ac = 1112°. 31$.

Soll im nämlichen Falle $a < 90$ seyn; so findet man wie zuvor 1tens
Fig. 488.

$a = 38° 15' 52''$,
und $b = 128° 37' 8''$.

2tens verhält sich
Sin. $c : ab =$ Sin. $b : ac$.

Es ist aber
Log. Sin. $128° 37' 8'' = 9.8928260$
Log. $594 = 2.7737864$
Summe $= 12.6666124$
Log. Sin. $13° 7' = 9.3559007$
also Log. $ac = 3.3107117$
und $ac = 2045°. 08$.

260. Sind in einem Dreyecke abc zwo Seiten ab und bc nebst dem eingeschlossenen Winkel b gegeben; so wird die Senkrechte an, welche man von dem Ende a der kleinern auf die größere bc zieht, nachdem b ein spitzer oder stumpfer Winkel ist, Fig. 489. innerhalb des Dreyeckes oder Fig. 490. außerhalb desselben fallen.
Fig. 489. 490.

Man erhält also 1tens die Senkrechte an, wenn man sagt: es verhält sich der Halbmesser zu der kleinern Seite ab, wie der Sinus des gegebenen Winkels b zu der Senkrechten an.

2tens erhält man den Abschnitt bn der größern Seite bc, wenn man sagt: es verhält sich der Halbmesser zu der kleinern Seite ab, wie der Kosinus des gegebenen Winkels b zu bn.

3tens

3tens findet man den Abschnitt cn ebenjener Seite bc, wenn man den Abschnitt bn Fig. 489. von bc abzieht, oder Fig. 490. zu bc addirt.

4tens findet man den Winkel c, welcher der kleinern Seite ab entgegensteht, und also allzeit spitz zu nehmen ist, wenn man sagt; **es verhält sich der Abschnitt cn zu dem Halbmesser, wie die Senkrechte an zu der Tangente des Winkels c;** sodann erhält man den dritten Winkel a, wenn man b + c von 180° abzieht, und endlich noch die dritte Seite, wenn man sagt: **es verhält sich der Sinus des Winkels c zu der kleinern Seite ab, wie der Sinus des gegebenen Winkels b zu der gesuchten Seite ac.**

Fig. 489. Ist z. B. ab = 989°
bc = 992°
und b = 2°;

so verhält sich 1tens

Halbm. : ab = Sin. b : an.

Es ist aber

Log. Sin. 2°	=	8,5428192
Log 989	=	2,9951963
Summe	=	11,5380155
Log. Halbm.	=	10,0000000
also Log. an	=	1,5380155.

2tens verhält sich

Halbm. : ab = Kos. b : bn.

Es ist aber

Log. Kos. 2°	=	9,9997354
Log. 989	=	2,9951963
Summe	=	12,9949317
Log. Halbm.	=	10,0000000
also Log. bn	=	2,9949317
bn	=	988°. 39
und cn	=	3. 61

3tens

3tens verhält sich

cn : Halbm. = an : Tang. c.

Es ist aber

Log. an	=	1,5380155
Log. Halbm.	=	10,0000000
Summe	=	11,5380155
Log. 3,61	=	0,5575072
also Log. Tang. c	=	10,9805083
c	=	84° 1′ 45″
und a	=	93, 58—15.

4tens verhält sich

Sin. c : ab = Sin. b : ac.

Es ist aber

Log. 2	=	8,5428192
Log. 989	=	2,9951963
Summe	=	11,5380155
Log. 84° 1′ 45″	=	9,9976375
also Log. ac	=	1,5403780
und ac	=	34°, 70.

261. Sind endlich alle drey Seiten gegeben, und man nimmt die gröſste Seite bc zur Grundlinie an, und zieht die Senkrechte an; so findet man 1tens nach Nro. 19. den größern Abschnitt bn, welcher an der mittlern Seite ab liegt, 2tens den Winkel b, welcher der kleinsten Seite ac entgegensteht, also ein spitzer ist, wenn man sagt: **es verhält sich die Seite ab zum Halbmesser, wie der größere Abschnitt bn zu dem Kosinus des Winkels b**, 3tens den Winkel c, welcher der mittlern Seite entgegensteht, folglich abermal ein spitzer ist, wenn man sagt: **es verhält sich die kleinste Seite ac zu dem Sinus des Winkels b, wie die mittlere Seite ab zu dem Sinus des Winkels c**, endlich 4tens noch den dritten Winkel a, wenn man die Summe der zween gefundenen von 180° abzieht. (Fig. 491.)

Ist

Ist z. B. ab = 920 Klafter
ac = 655 Klafter
und bc = 1304 Klafter;
so verhält sich nach Nro. 19. 1tens
1304 : 1575 = 265 : Unterscheid der Abschnitte.
Es ist aber

Log. 265 = 2.4232459
Log. 1575 = 3.1972806
Summe = 5.6205265
Log. 1304 = 3.1152776
also Log. Unt. = 2.5052489
der Unterscheid der Abschnitte = 320
der halbe Unterscheid = 160
ihre halbe Summe = 652
folglich der größere Abschnitt bn = 812

Sodann verhält sich 2tens
ab : Halbm. = bn : Kos. b
Es ist aber

Log. 812 = 2.9095560
Log. Halbm. = 10.0000000
Summe = 12.9095560
Log. 920 = 2.9637878
also Log. Kos. b = 9.9457682
und b = 28° 2′ 29″.

Endlich verhält sich 3tens
ac : Sin. b = ab : Sin. c.
Es ist aber

Log. 920 = 2.9637878
Log. Sin. 28° 2′ 29″ = 9.6721987
Summe = 12.6359865
Log. 655 = 2.8162413
also Log. Sin. c = 9.8197452
c = 41° 19′ 23″,
und a = 110° 38′ 8″.

262.

262 Ist in dem Dreyecke abc die Seite ca kleiner als cb, und man beschreibt aus c mit dem Halbmesser ca einen Kreis; so muß dieser die Seite cb in einem Punkte n schneiden: und verlängert man cb bis in m, und zieht am, an, und no gleichlaufend mit am; so sind die Dreyecke bma und bno ähnlich; also verhält Fig. 492.

sich bm : bn = am : on.

Der Winkel beym Umfange man ruht auf dem Durchmesser mn, also hat er 90°; und der Winkel ano ist ihm wegen der Gleichlaufenden ma und no gleich, folglich hat auch dieser 90°. Nimmt man also an zum Halbmesser an; so wird nach Nro. 252. am die Tangente des Winkels y und no die Tangente des Winkels u. Daher verhält sich

bm : bn = Tang. y : Tang. u.

Der Winkel r ist den Dreyecken can und cab gemein, also

$$x + y = s + z, \text{ folglich}$$

$$\text{weil } x = y \text{ ist},$$

$$y = \frac{s + z}{2}:$$

ferner ist y der äußere Winkel des Dreyeckes anb, also

$$u = y - z, \text{ oder}$$

$$u = \frac{s + z}{2} - z$$

$$u = \frac{s + z - 2z}{2}$$

$$u = \frac{s - z}{2}.$$

Es ist also y die halbe Summe und u der halbe Unterscheid der Winkel s und z.

Endlich ist bm der Summe und bn dem Unterscheide der Seiten ca und cb gleich.

Daher verhält sich in jedem Dreyecke abc, die Summe bm zwoer Seiten ca und cb zu ihrem Un-

Unterscheide b n, wie die Tangente der halben Summe y ihrer entgegengesetzten Winkel s und z zu der Tangente des halben Unterscheides u ebendieser Winkel.

Weil der Unterscheid zweener Winkel eines Dreyeckes nie über 180° haben kann; so ist der halbe Unterscheid allemal ein spitzer Winkel.

Sind also in einem Dreyecke zwo Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben; so kann dasselbe viel kürzer als nach Nro. 260. aufgelöset werden. Denn zieht man den gegebenen Winkel von 180° ab; so erhält man die Summe der Winkel, welche den gegebenen Seiten entgegenstehen: und sucht man durch die vorige Proportion den halben Unterscheide ebenjener Winkel; so giebt dieser zu ihrer halben Summe addirt den größern und von ihrer halben Summe abgezogen den kleinern. Endlich findet man noch die dritte Seite, wenn man sagt: **es verhält sich der Sinus des einen aus den gefundenen Winkeln zu der entgegengesetzten Seite, wie der Sinus des gegebenen Winkels zu der gesuchten.**

Fig. 489. Ist z. B. wieder wie oben Nro. 260.

$$ab = 989$$
$$bc = 992°$$
$$\text{und } b = 2°;$$

so verhält sich 1tens

$$bc + ab : bc - ab = \text{Tang. } \frac{a+c}{2} : \text{Tang. } \frac{a-c}{2}.$$

Es ist aber

Log. Tang. 89°	=	11,7580785
Log. 3	=	0,4771213
Summe	=	12,2351998
Log. 1981	=	3,2968845

$$\text{also Log. Tang. } \frac{a-c}{2} = 8{,}9383153$$

$$\frac{a - c}{2} = 4° - 57' - 30''$$

$$a = 93, 57 - 30$$

$$\text{und } c = 84 - 2 - 30.$$

2tens verhält sich

Sin. c : ab = Sin. b : ac.

Es ist aber

Log. 2°	=	8,5428192
Log. 989	=	2,9951963
Summe	=	11,5380155
Log. 84°, 2′ 30′	=	9,9976474
also Log. ac	=	1,5403681
und ac	=	34°, 70

263. Weil die Tangenten af, ah, ag der Bögen ad, ae, ab, welche sich dem Bogen von 90° nähern, bey jeden kleinsten und gleichen Unterscheiden de, eb der Bögen um sehr ungleiche Größen fh, hg wachsen; so kann man sich von der Methode nach Nro. 247. in diesem Falle zu interpoliren wenig Genauigkeit versprechen. Dergleichen Tangenten selbst haben wegen ebendieses ungleichen schnellen Wachsthumes durch keine Methode genau genug berechnet werden können. Fig. 493.

Man muß also bey der Auflösung eines Dreyeckes die Tangenten der Winkel, welche dem rechten nahe kommen, in die Rechnung zu bringen, soviel möglich ist, vermeiden.

Sind in einem rechtwinklichten Dreyecke die beeden Katheden gegeben, und der eine aus den spitzen Winkeln ist sehr groß; so sucht man ebendieser Ursache wegen den kleinern Winkel eher als den größern. Und sind in jedem Dreyecke zwo Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben, und dieser Winkel ist 1tens groß, also die halbe Summe der zween übrigen klein; so kann man Kürze halber nach Nro. 262. verfahren.

Ist

Ist aber 2tens der gegebene Winkel klein, also die halbe Summe der zween übrigen groß, und der Unterscheid der gegebenen Seiten, also jener der entgegengesetzten Winkel auch groß; so geht man zuverläßiger nach Nro. 260. zu Werke. Ist endlich 3tens der gegebene Winkel sehr klein, und der Unterscheid der gegebenen Seiten, also jener der entgegengesetzten Winkel auch sehr klein; so kann man auf die eine eben so wenig als auf die andere Methode sich verlassen, weil jedesmal die Tangente eines großen Winkels in die Rechnung kömmt. Der Winkel c müßte also in diesem Fall durch den Winkel nac bestimmt werden.

Auch ist es nur der Tangente von 89° zuzuschreiben, daß der Winkel c um 45″ kleiner nach Nro. 262. als nach Nro. 260. gefunden wird.

Denn wird der Winkel c durch nac bestimmt, so findet man ihn eben so groß wie nach Nro. 260.

264. Jedes Dreyeck Nro. 254. ist nach Nro. 59. im 2ten und 4ten Falle allzeit möglich: unmöglich wird es aber, wenn im 1ten Falle die gegebenen Winkel über 180° betragen, oder im 5ten Falle eine aus den gegebenen Seiten größer als die Summe der zwo übrigen angegeben ist, oder endlich wenn im 3ten Falle Fig. 487. 388. die kleinere Seite ab kleiner ist als die Senkrechte bn, welche man auf die unbekannte Seite ac zieht. Dieses erfährt man, wenn man die Senkrechte bn durch das rechtwinklichte Dreyecke bnc nach Nro. 253. berechnet.

Anwendung.

Fig. 494. 265. Nimmt man auf der Erde die Punkte a, b, c, d, e, f, g, h, k, l &c. so an, daß ein ganzes Land mit einem Netze aneinander hangender Dreyecke überzogen wird, und mißt oder berechnet im wirklichen Maße alle Seiten derselben; so kann man diese Dreyecke unter soviele Meßtische, als vonnöthen sind, austheilen, jedem Tische vermittelst des verjüngten Maßstabes nach Nro. 171. eine Figur auftragen, das Innere einer jeden Figur nach Nro. 181. rc. aufnehmen, die einzelnen Aufnahmen längst der

ge-

gemeinen Seiten nach Nro. 189. zusammenstoßen, und soviel zuverläßiger als nach Nro. 89. die Karte eines ganzen Landes verfertigen.

Erste Methode das trigonometrische Netz der Dreyecke anzufangen und fortzusetzen.

266. Vorausgesetzt, man sey im Stande vermittelst eines Winkelmessers die Grade, Minuten und Sekunden eines jeden Winkels jener horizontalen Dreyecke genau zu bestimmen; so ist es zur Berechnung des ganzen Netzes hinlänglich, eine einzelne Seite zu messen. Denn beobachtet man alle Winkel jener Dreyecke und mißt die Seite a b; so findet man nach Nro. 257. 1tens durch a b die Seiten a c und b c, 2tens durch a c die Seiten a d und c d, 3tens durch b c die Seiten b e und c e u. s. f. durch jede Seite b e, e c, c d oder a d immer wieder die zwo übrigen Seiten eines andern Dreyeckes. Fig. 494.

Ist z. B. a b = 4567 Klafter, und in dem Dreyecke a b c die Winkel

$$a = 70^\circ \ 4' \ 11''$$
$$b = 60^\circ \ 17' \ 13''$$
und $$c = 49^\circ \ 38' \ 36''$$

so verhält sich 1tens

$$\text{Sin c} : \text{ab} = \text{Sin. a} : \text{bc}.$$

Es ist aber

$$\begin{array}{rl} \text{Log. Sin. a} = & 9.9731778 \\ \text{Log. ab} = & 3.6596310 \\ \hline \text{Summe} = & 13.6328088 \\ \text{Log. Sin. c} = & 9.8819710 \\ \hline \text{also Log. bc} = & 3.7508378 \\ \text{und bc} = & 5634.27 \end{array}$$

2tens verhält sich

$$\text{Sin. c} : \text{ab} = \text{Sin. b} : \text{ac}.$$

Es ist aber

Log.

Log. Sin. b = 9.9387791
Log. ab = 3.6596310

Summe = 13.5984101
Log. Sin. c = 9.8819710

also Log. ac = 3.7164391
und ac = 5205.22

Sind in dem Dreyecke dac die Winkel
a = 30° 17′ 15″
c = 59° 19′ 5″
und d = 90° 23′ 40″
so verhält sich 1tens
Sin. d : ac = Sin. c : ad.
Es ist aber

Log. Sin. c = 9.9345050
Log. ac = 3.7164391

Summe = 13.6509441
Log. Sin. d = 9.9999897

also Log. ad = 3.6509544
und ad = 4476.66

2tens verhält sich
Sin. d : ac = Sin. a : dc.
Es ist aber

Log. Sin. a = 9.7027227
Log. ac = 3.7174391

Summe = 13.4191618
Log. Sin. d = 9.9999897

also Log. dc = 3.4191721
und dc = 2625.26

Sind in dem Dreyecke adf die Winkel
a = 61° 27′ 49″
d = 79° 4′ 58″
und f = 39° 27′ 13″
so verhält sich 1tens
Sin. f : ad = Sin. d : af.

Es

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\text{Log. Sin. } d &= 9.9920681 \\
\text{Log. } ad &= 3.6509544 \\
\hline
\text{Summe} &= 13.6430225 \\
- \text{Log. Sin. } f &= 9.8030836 \\
\hline
\text{also Log. } af &= 3.8399389 \\
\text{und } af &= 6917.33
\end{aligned}$$

2tens verhält sich

$$\text{Sin. } f : ad = \text{Sin. } a : df.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\text{Log. Sin. } a &= 9.9437486 \\
\text{Log. } ad &= 3.6509544 \\
\hline
\text{Summe} &= 13.5947030 \\
\text{Log. Sin. } f &= 9.8030836 \\
\hline
\text{also Log. } df &= 3.7916194 \\
\text{und } df &= 6188.98
\end{aligned}$$

Sind in dem Dreyecke ahb die Winkel

$$\begin{aligned}
a &= 71^\circ\ 43'\ 57'' \\
b &= 61^\circ\ 49'\ 9'' \\
h &= 46^\circ\ 26'\ 54''
\end{aligned}$$

so verhält sich 1tens

$$\text{Sin. } h : ab = \text{Sin. } b : ah.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\text{Log. Sin. } b &= 9.9452033 \\
\text{Log. } ab &= 3.6596310 \\
\hline
\text{Summe} &= 13.6048343 \\
\text{Log. Sin. } h &= 9.8601902 \\
\hline
\text{also Log. } ah &= 3.7446441 \\
\text{und } ah &= 5554.49
\end{aligned}$$

2tens verhält sich

$$\text{Sin. } h : ab = \text{Sin. } a : bh.$$

Es ist aber

Log. Sin. a = 9.9775423
Log. ab = 3.6596310

Summe = 13.6371733
Log. Sin. h = 9.8601902

also Log. bh = 3.7769831
und bh = 5983.88

Sind in dem Dreyecke ahg die Winkel
a = 69° 45′ 38″
h = 52° 54′ 51″
g = 57° 19′ 31″

so verhält sich 1tens
Sin. g : ah = Sin. h : ag.

Es ist aber
Log. Sin. h = 9.9018575
Log. ah = 3.7446441

Summe = 13.6465016
Log. Sin. g = 9.9251826

also Log. ag = 3.7213190
und ag = 5264.04

2tens verhält sich
Sin. g : ah = Sin. a : gh.

Es ist aber
Log. Sin. a = 9.9723209
Log. ah = 3.7446441

Summe = 13.7169650
Log. Sin. g = 9.9251826

also Log. gh = 3.7917824
und gh = 6191.31

Sind in dem Dreyecke afg die Winkel
a = 56° 41′ 10″
g = 75° 46′ 48″
f = 47° 32′ 2″

so verhält sich 1tens
Sin. f : ag = Sin. a : gf.

Es

Es ist aber

Log. Sin. a	=	9.9220370
Log. ag	=	3.7213190
Summe	=	13.6433560
Log. Sin. f	=	9.8678661
also Log. gf	=	3.7754899
und gf	=	5963.34

2tens verhält sich

Sin. f : ag = Sin. g : af.

Es ist aber

Log. Sin. g	=	9.9864849
Log. ag	=	3.7213190
Summe	=	13.7078039
Log. Sin. f	=	9 8678661
also Log. af	=	3.8399378
und af	=	6917.32.

267. So oft die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt a herumliegen, von 360° oder die Summe der drey Winkel eines jeden Dreyeckes von 180° abweicht; ist es ein sicheres Zeichen, daß bey der Beobachtung ein Fehler eingeschlichen ist. Beträgt der Unterscheid nur etliche Sekunden; so werden die Dreyecke mit den beobachteten Winkeln ohne eine Aenderung vorzunehmen berechnet: ist aber jener Unterscheid so beträchtlich, daß man ihn durch größern Fleiß tilgen kann; so muß die Beobachtung wiederholet werden. Fig. 494.

Berechnet man wie oben, die Seite af durch ab, ac und ad, sodann wieder durch ab, ah und ag, und findet af in beeden Fällen von verschiedener Größe; so ist dieses abermal ein sicheres Zeichen eines begangenen Fehlers. Setzet man in diesem Falle die erste Rechnung durch af, ag und ah bis ab, und die zwote auch durch af, ad und ac bis ab fort, und die in beeden Rechnungen gefundene ab ist wieder von der bekannten ersten ab verschieden; so kann man vermuthen

daß der Fehler in der Beobachtung liegt, trift aber die in der einen Rechnung gefundene a b mit der bekannten ersten a b überein; so kann man eher schließen, daß jener Unterscheid der Seite a f nur von einem Rechnungsfehler, der in der andern Rechnung begangen worden ist, herrühre.

Es kann gar leicht geschehen, daß ein Fehler einen andern ersetzet, oder wenigstens so vermindert, daß beede in der Probe nicht mehr merklich scheinen; daher ist keine aus den vorigen Proben untrüglich, sondern eine jede muß wieder durch eine künftige bestätiget werden.

Dieser Proben wegen soll auf jedem Punkte a der leezte Winkel nie aus den vorigen geschlossen, sondern allzeit beobachtet werden. Ueberdieß soll man nie eine Reihe der Dreyecke berechnen, ohne daß man ihr nicht durch eine andere Reihe entgegen rechnet, und sich durch die doppelte Bestimmung der beeden Reihen gemeinen Seite der Zuverläßigkeit des Ganzen versichert.

Die Mühe, welche die angestellten Proben kosten, wird dem fleißigen Beobachter durch das Vergnügen von der Richtigkeit seiner Arbeit überzeugt zu seyn reichlich ersetzet; und dem nachläßigen oder unachtsamen dienet die Wiederholung der Arbeit zu einer schweren aber verdienten Strafe.

Fig. 494. 268. Die Standlinie a b wird auf einem ebenen Erdreiche, wenn es thunlich ist, beynahe mitten im Lande mit den großen Meßstangen nach Nro. 60, um von der wahren Länge derselben ganz sicher zu seyn, mehrmal mit allem Fleiße gemessen, und wofern man nur einen kleinen Unterscheid findet, die mittlere Größe gewählt.

Nimmt man die Standlinie kleiner oder größer, als sie wirklich ist, an; so wird das ganze nach der falschen Standlinie berechnete Netz der Dreyecke dem Netze, welches man nach der wahren Standlinie hätte berechnen sollen, ähnlich; weil die auf dem Felde beobachteten Winkel, wodurch alles bestimmet wird, in beeden Fällen dieselben bleiben. Der Fehler der Standlinie häuft sich also nie, sondern bleibt in gleichen Entfernungen immer der-

selbe und verhält sich in verschiedenen Entfernungen wie diese. Mißt man daher eine sehr große Standlinie, so kann ein geringer Fehler allemal für nichts angesehen werden.

269. Ein jeder aus den Punkten c, d, e &c. soll soviel es möglich ist, so gewählet werden, daß er mit den schon angenommenen und noch anzunehmenden Punkten ringsum durch Dreyecke von nicht gar zu ungleichen Seiten verbunden werden kann. Ein geschickter Meßkünstler, der ein gutes Aug hat, eine Gegend schnell beurtheilt, das Netz der Dreyecke sich immer lebhaft vorstellet und jeden Punkt selbst wählet, wird ohne viel unnützes Herumirren sich selten von dieser Regel abzuweichen zwingen lassen. Fig. 494.

270. Die Punkte c, d, e &c. werden meistens durch Bäume, deren Aeste man bis an den Gipfel abhauet und die man fest in die Erde eingrabet, angemerkt; bey Abgang dieser bedient man sich der in Gestalt eines Kegels hoch aufgerichteten Stein oder Erdhaufen oder endlich eines Feuers, das man zu einer abgeredten Nachtsstunde auf dem Punkte unterhält. Fig. 494.

Lassen sich die Scheitel der Dreyecke, ohne daß ihre Seiten zu unproportionirt ausfallen, auf die Spitze der Kirchthürme, Kapellen, Ehrensäulen, einzelner Bäume, die man bis an den Gipfel von Aesten entblößet, oder auf was immer für andere in die Ferne sichtbare natürliche Zeichen richten; so kann man viele Mühe und Unkosten andere Zeichen aufrichten zu lassen ersparen.

Die Punkte werden durch Ziffern oder aber durch Buchstaben a, b, c &c. und ihre verschiedenen Potenzen a^0, b^0, c^0; a^1, b^1, c^1; a^2, b^2, c^2; a^3, b^3, c^3; &c. benennt, und nach den nächst gelegenen Dörfern beschrieben.

Von dem Centriren der Winkel.

Fig. 495. 496. 497. 498.

271. Liegt Fig. 495. der Scheitel C des Dreyeckes ABC innerhalb des Dreyeckes ADB, und man zieht die Gerade DCE; so ist der Winkel ECB der äußere des Dreyeckes BCD, und der Winkel ECA der äußere des Dreyeckes ACD, folglich der Winkel

$$x = b + y \text{ und}$$
$$u = a + z,$$

also Fig. 496. $c = d + a + b$.

Wird Fig. 497. der Winkel b unendlich klein oder $= 0$; so ist

$$c = d + a:$$

und wird Fig. 498. der Winkel b verneinend; so ist

$$c = d + a - b, \text{ oder}$$
$$c + b = d + a.$$

Ebendieses erhellet auch aus der Zeichnung. Denn Fig. 497. ist c der äußere Winkel des Dreyeckes ACD und Fig. 498. ist $x = a + d$ und $x = c + b$.

Wenn also zwey Dreyecke ACB und ADB auf derselben Seite AB stehen, und der Scheitel C des einen liegt innerhalb des andern; so ist der innere Winkel c Fig. 496. der Summe der drey äußern $d + a + b$, und Fig. 497. der Summe der zween äußern $d + a$ gleich: und liegt Fig. 498. der Scheitel eines jeden Dreyeckes außerhalb des andern; so sind die zween Winkel $c + b$ auf einer Seite den zween Winkeln $d + a$ auf der andern Seite gleich.

Ist nun der eine Winkel c und die Schenkel AD und BD des andern d bekannt, und man mißt die Senkrechten Dp und Dq, welche man aus dem Scheitel des unbekannten Winkels auf die Schenkel des bekannten zieht; so findet man 1tens die Winkel a und b, wenn man sagt: es verhält sich

$$AD : \text{Halbm.} = Dp : \text{Sin. } a$$
$$\text{und } BD : \text{Halbm.} = Dq : \text{Sin. } b;$$

sodann 2tens erhält man den Winkel d, wenn man Fig. 496.

a +

a + b von c, Fig. 497. a von c und Fig. 498. a von c + b abzieht.

Ist A D und A C sehr groß, der Winkel a aber und Dr sehr klein; so werden die auf A C gezogenen Senkrechten D p und r S nach unserer Empfindung so gut als gleich; das Verhältniß A r : r S = A D : D p aber giebt den Winkel a, also giebt ihn auch das Verhältniß A r : D p, weil D p in diesem Falle allemal anstatt r s genommen werden kann. Fig. 499.

272. Stellet man also, um den Winkel A D B zu erhalten das Instrument anstatt über D über einen andern Punkt C, der sehr nahe bey D liegt, beobachtet den Winkel A C B und berechnet das Dreyeck A D B, indem man den Winkel A D B = A C B setzt; so kommen die Werthe der Seiten A D und B D, welche man durch diese Rechnung erhält, den wahren Werthen ebendieser Seiten sehr nahe. Mißt man also die Senkrechten D p und D q, welche man aus dem Scheitel D auf die Gesichtslinien A C und B C zieht; so findet man nach Vorigem durch diese Senkrechten und jene Werthe der Seiten A D und B D die Winkel a und b, und aus diesen und dem beobachteten Winkel A C B endlich den gesuchten wahren Winkel A D B, nach welchem das Dreyeck A D B noch einmal berechnet, auch die wahren Werthe der Seiten A D und B D giebt. Fig. 496. 497. 498.

Diese Methode einen Winkel A D B durch einen andern A C D und durch die Senkrechten D p und D q zu bestimmen, heißt den Winkel D **centriren**, und findet statt, so oft man einen Winkel, in dessen Scheitel das Instrument nicht gestellet werden konn, beobachten soll.

273. Weil die Winkel d und c Fig. 496. um die Summe der Winkel a und b, Fig. 498. aber nur um den Unterscheid ebendieser Winkel a und b voneinander unterschieden sind; und die ersten Werthe der Seiten A D und B D, die Winkel a und b, folglich auch der Winkel d desto genauer gefunden werden, je weniger der Winkel c von d unterschieden ist; so nimmt man den Beobachtungs-

punkt

punkt c allemal lieber auf der Seite des wahren Scheitels als vor- oder rückwärts desselben an.

Findet man im Falle das Instrument auf der Seite des wahren Scheitels D steht a = b; so wird auch d = c, also sind die schon gefundenen Werthe der Seiten AD und BD die wahren, und das Dreyeck bedarf keiner weitern Berechnung mehr. Dieses geschieht, so oft sich der Beobachtungspunkt C in dem Umfange, welcher durch A, B und D geht, befindet, wenn auch C noch so weit von D entfernet ist.

Findet man in jedem Falle den Winkel d um sehr vieles von c unterschieden, welches geschieht, wenn C weit von dem Umfange, welcher durch A, B und D geht, absteht; so weichen auch die ersten Werthe der Seiten AD und BD von den wahren mehr ab, und die Winkel a und b, also auch d sind nicht mehr nach aller Schärfe richtig.

Berechnet man aber das Dreyeck nach dem centrirten Winkel d noch einmal; so erhält man die Seiten AD und BD abermal sehr nahe, also die Winkel a und b, folglich auch d richtig, sobald der itzt gefundene d von dem zuvor gefundenen d nicht mehr viel unterschieden ist.

Diese Annäherung muß allemal solange fortgesetzet werden, bis endlich die Berechnung des Dreyeckes nach dem letztgefundenen Winkel d die Seiten AD und BD nur sehr wenig, die Winkel a und b aber gar nicht mehr abändert.

274 Weil die Winkel a und b allemal sehr spitze sind, nur aus Minuten und Sekunden oder wohl gar nur aus Sekunden bestehen, und das Interpoliren hier nicht die verlangte Schärfe giebt; so kann in dergleichen Fällen die Tafel der Logarithmen der Sinuße von einer Sekunde an bis 30 Minuten, welche Herr Obristwachtmeister Unterberger seiner gewöhnlichen Funktionen Tabelle vorangesetzet hat, einen sehr vortheilhaften Dienst leisten.

275. Ist z. B. in dem Dreyecke ADB die Seite Fig. 500.
AB = 5478 Klafter
der Winkel A = 32° 45′ 0″
und man beobachtet
den Winkel C = 113° 4′ 10″
und mißt die Senkrechten
Dp = 4 Klafter
und Dq = 2½ Klafter;
so wird, wenn man D = C setzet, in dem Dreyecke ADB
der Winkel B = 34° 10′ 50″.

Daher verhält sich 1tens
Sin. D : AB = Sin. B : AD.
Es ist aber

Log. Sin. B =	9.7495838
Log. AB =	3.7386220
Summe =	13.4882058
Log. Sin. D =	9.9638022
also Log. AD =	3.5244036.

2tens verhält sich
Sin. D : AB = Sin. A : BD.
Es ist aber

Log. Sin. A =	9.7331768
Log. AB =	3.7386220
Summe =	13.4717988
Log. Sin. D =	9.9638022
also Log. BD =	3.5079966.

3tens verhält sich
AD : Halbm. = Dp : Sin. a.
Es ist aber

die Summe =	10.6020600
Log. AD =	3.5244036
also Log. Sin. a =	7.0776564
und a =	0° 4′ 6″.

4tens

4tens verhält sich

BD : Halbm. = Dq : Sin. b.

Es ist aber

die Summe = 10.3890756
Log. BD = 3.5079966

also Log. Sin. b = 6.8810790
und b = 0° 2′ 37″.

Endlich ist C = 113° 4′ 10″
a = 0° 4′ 6″

C + a = 113° 8′ 16″
b = 0° 2′ 37″

also D = 113° 5′ 39″
und B = 34° 9′ 21″.

Berechnet man nun das Dreyeck ADB nach diesen verbesserten Winkeln; so verhält sich 1tens

Sin. D : AB = Sin. B : AD.

Es ist aber

Log. Sin. B = 9.7493076
Log. AB = 3.7386220

Summe = 13.4879296
Log. Sin. D = 9.9637224

also Log. AD = 3.5242072
und AD = 3343°. 54

2tens verhält sich

Sin. D : AB = Sin. A : BD.

Es ist aber

Log. Sin. A = 9.7331768
Log. AB = 3.7386220

Summe = 13.4717988
Log. Sin. D = 9.9637224

also Log. BD = 3.5080764
und BD = 3221°. 63

Aus dem kleinen Unterschiede des beobachteten Winkels C und des centrirten D läßt sich schon vermuthen,

daß

daß dieser der wahre sey: soll man sich aber davon überzeugen; so verhält sich ferner 3tens

AD : Halbm. = Dp : Sin. a.

Es ist aber

die Summe = 10.6020600
Log. AD = 3.5242072

also Log. Sin. a = 7.0778528
und a = 0° 4′ 6″.

4tens verhält sich

BD : Halbm. = Dq : Sin. b.

Es ist aber

die Summe = 10.3890756
Log. BD = 3.5080764

also Log. Sin. b = 6.8809992
und b = 0° 2′ 37″
folglich ist auch D = 113° 5′ 39″

wie zuvor.

276. Soll man in einem Dreyecke zween Winkel centriren; so setzet man den einen aus den beobachteten Winkeln dem wahren gleich, centrirt den andern, und sodann auch den ersten wie zuvor. Fig. 501.

Ist z. B. in dem Dreyecke ADB nur die Seite AB = 5478° bekannt, und man beobachtet

den Winkel DEB = 32° 45′ 0″
und ACB = 113° 4′ 10″

und mißt Ap = 5 Kl. Aq = 3 Kl. Dp = 4 Kl. und Dq = $2\frac{1}{3}$ Kl.; so findet man, wenn man DAB = DEB setzet, durch die vorige Rechnung

den Winkel D = 113° 5′ 39″
und den Winkel B = 34° 9′ 21″.

Sodann verhält sich um auch den Winkel A zu finden, 1tens

AD : Halbm. = Aq : Sin. d.

Es ist aber

die

die Summe = 10.4771213
Log. AD = 3.5242072

also Log. Sin. d = 6.9529141
und d = 0° 3′ 5″.

2tens verhält sich
AB : Halbm. = Ap : Sin. b.
Es ist aber die Summe = 10.6989700
Log. AB = 3.7386220

also Log. Sin. b = 6.9603480
und b = 0° 3′ 8″.
E = 32° 45′ 0″

E + b = 32° 48′ 8″
d = 0° 3′ 5″

also A = 32° 45′ 3″
D = 113° 5′ 39″
und B = 34° 9′ 18″.

Berechnet man endlich das Dreyeck ADB nach diesen centrirten Winkeln; so verhält sich 1tens
Sin. D : AB = Sin. B : AD.
Es ist aber Log. Sin. B = 9.7492983
Log. AB = 3.7386220

Summe = 13.4879203
Log. Sin. D = 9.9637224

also Log. AD = 3.5241979
und AD = 3343°. 47

2tens verhält sich
Sin. D : AB = Sin. A : BD.
Es ist aber
Log. Sin. A = 9.7331866
Log. AB = 3.7386220

Summe = 13.4718086
Log. Sin. D = 9.9637224

also Log. BD = 3.5080862
und BD = 3221°. 70

277. Sind zween Winkel eines Dreyeckes A und D beobachtet oder centrirt: und man soll auch den dritten B, um sich von der Richtigkeit jener zu überzeugen, centriren; so schließt man erstlich den dritten Winkel aus den zween bekannten, und berechnet das Dreyeck, sodann beobachtet man den Winkel F, mißt die Senkrechten Bp und Bq und verfährt wie zuvor. Fig. 502.

Ist z. B. das Dreyeck ADB das vorige, der beobachtete Winkel F = 34° 9′ 48″.

Bq = 4 Kl. und Bp = 6 Kl.; so verhält sich 1tens

AB : Halbm. = Bp : Sin. a.

Es ist aber die Summe = 10.7781513
Log. AB = 3.7386220

also Log. Sin. a = 7.0395293
und a = 0° 3′ 46″

2tens verhält sich

BD : Halbm. = Bq : Sin. d.

Es ist aber

die Summe = 10.6020600
Log. BD = 3.5080862

also Log. Sin. d = 7.0939738
und d = 0° 4′ 16″.

Endlich ist F = 34° 9′ 48″
a = 0° 3′ 46″

F + a = 34° 13′ 34″
d = 0° 4′ 16″

also B = 34° 9′ 18″

wie es seyn soll.

Bey Kirchthürmen stellet man das Instrument unter ein Fenster oder lieber, wenn es sich wie bey einzelnen Kapellen, Ehrensäulen, errichteten Stein-Erd-oder Holzhaufen thun läßt, nebenhin auf die Erde. Die Senkrechten werden in jedem Falle nach den vielfältig gegebenen Regeln der Geometrie ausgestecket und gemessen.

Zwo-

Zwote Methode das trigonometrische Netz der Dreyecke fortzusetzen.

Fig. 503. 278. Ist die Seite AB einmal bekannt, und man kann weder aus C in D noch aus D in C sehen; so mißt man die Winkel in A und jene in B, und berechnet die Dreyecke ABD und ABC.

Diese Berechnung ist hinlänglich, sobald die Punkte C und D nur für sich bestimmet werden sollen: soll man aber das Netz durch die Gerade CD noch weiter fortsetzen, und z. B. den Punkt N bestimmen; so muß man auch das Dreyeck CBD oder CAD nach Nro. 260. oder 262. berechnen, damit man nebst der Seite CD die Winkel CDA und DCB erhält. Denn beobachtet man sodann die Winkel ADN, und BCN; so geben jene von diesen abgezogen auch die Winkel CDN und DCN.

Ist z. B. AB = 6789.46 Klafter, und in dem Dreyecke ABC der Winkel

$$A = 99° \ 14' \ 11''$$
$$B = 31° \ 7' \ 52''$$
$$\text{also } C = 49° \ 37' \ 57''$$

so verhält sich 1tens

Sin. C : AB = Sin. B : AC.

Es ist aber

Log. Sin. B =	9.7134890
Log. AB =	3.8318352
Summe =	13.5453242
Log. Sin. C =	9.8819013
also Log. AC =	3.6634229
und AC =	4607,05

2tens verhält sich

Sin. C : AB = Sin. A : BC.

Es ist aber

Log. Sin. A = 9.9943323
Log. AB = 3.8318352

Summe = 13.8261675
Log. Sin. C = 9.8819013

also Log. BC = 3.9442662
und BC = 8795.61

Ist ferner in dem Dreyecke ABD der Winkel
A = 33° 6′ 2″
B = 94° 39′ 17″
D = 52° 14′ 41″

so verhält sich 1tens
Sin. D : AB = Sin. A : BD.

Es ist aber Log. Sin. A = 9.7372801
Log. AB = 3.8318352

Summe = 13.5691153
Log. Sin. D = 9.8979750

also Log. BD = 3.6711403
und BD = 4689.65

2tens verhält sich
Sin. D : AB = Sin. B : AD

Es ist aber Log. Sin. B = 9.9985652
Log. AB = 3.8318352

Summe = 13.8304004
Log. Sin. D = 9.8979750

also Log. AD = 3.9324254
und AD = 8559.05

Da nun in dem Dreyecke ACD der Winkel
A = 66° 8′ 9″ ist;

so verhält sich nach Nro. 260. 1tens
Halbm. : AC = Sin. A : Co.

Es ist aber
Log. Sin. A = 9.9611871
Log. AC = 3.6634229

also Log. Co = 3.6246100

2tens

2tens verhält sich

Halbm. : AC = Kos. A : Ao

Es ist aber

Log Kos A = 9.6069933
Log. AC = 3.6634229

also Log. Ao = 3.2704162
Ao = 1863.87
und Do = 6695.18

3tens verhält sich

Do : Halbm. = Co : Tang. D.

Es ist aber die Summe = 13.6246100
Log. Do = 3.8257622

also Log. Tang. D = 9.7988478
D = $32^\circ\ 10'\ 54''$
und C = $81^\circ\ 40'\ 57''$
folglich BCD = $32^\circ\ 3'\ 0''$

4tens verhält sich

Sin. C : AD = Sin. A : CD.

Es ist aber

Log. Sin. A = 9.9611871
Log. AD = 3.9324254

Summe = 13.8936125
Log. Sin. C = 9.9954078

also Log. CD = 3.8982047
und CD = 7910.51

5tens verhält sich

Sin. C : AD = Sin. D : AC.

Es ist aber

Log. Sin. D = 9.7264056
Log. AD = 3.9324254

Summe = 13.6588310
Log. Sin. C = 9.9954078

also Log. AC = 3.6634232
und AC = 4607.05 wie oben.

279. Wir AB kleiner oder größer, die Winkel in A und B aber bleiben dieselben; so sind die Figuren 503. und 504. ähnlich, folglich bleiben in beeden auch die Winkel in C und D dieselben.

Fig. 503. 504.

Ist also die Seite CD bekannt, und man beobachtet nur die Winkel auf der unbekannten Seite AB in A und B; so kann man AB nach Belieben annehmen, wie zuvor die Winkel in C und D finden, und sodann noch durch CD das Dreyeck ACD, und durch AD das Dreyeck ADB nach der ersten Methode berechnen.

Ist z. B. CD = 8014.79 Klafter, und man nimmt AB = 6789.46 Klafter an, und beobachtet die Winkel

$$CAB = 99° \ 14' \ 11''$$
$$DAB = 33° \ 6' \ 2''$$
$$ABD = 94° \ 39' \ 17''$$
$$ABC = 31° \ 7' \ 52'';$$

so findet man durch die vorige Rechnung die Winkel

$$ACD = 81° \ 40' \ 57''$$
$$ADC = 32° \ 10' \ 54''$$
oder $BDC = 84° \ 25' \ 35''$
und $BCD = 32° \ 3' \ 0''$.

Sodann verhält sich in dem Dreyecke ACD 1tens

Sin. A : CD = Sin. D : AC.

Es ist aber

Log. Sin. D =	9.7264056
Log. CD =	3.9038921
Summe =	13.6302977
Log. Sin. A =	9.9611871
also Log. AC =	3.6691106
und AC =	4667.78

2tens verhält sich

Sin. A : CD = Sin. C : AD.

Es ist aber

Log. Sin. C = 9.9954077
Log. CD = 3.9038921

Summe = 13.8992998
Log. Sin. A = 9.9611871

also Log. AD = 3.9381127
und AD = 8671.86

Endlich verhält sich in dem Dreyecke ADB 1tens
Sin. B : AD = Sin. A : BD.
Es ist aber Log. Sin. A = 9.7372801
Log. AD = 3.9381127

Summe = 13.6753928
Log. Sin. B = 9.9985652

also Log. BD = 3.6768210
und BD = 4751.46

2tens verhält sich
Sin. B : AD = Sin. D : AB.
Es ist aber Log. Sin. D = 9.8979750
Log. AD = 3.9381127

Summe = 13.8360877
Log. Sin. B = 9.9985652

also Log. AB = 3.8375225
und AB = 6878.95

Dritte Methode das trigonometrische Netz der Dreyecke fortzusetzen.

Fig. 505. 280. Sind die drey Punkte A, B und C nach der ersten oder zwoten Methode bestimmt; so läßt sich allemal das Dreyeck ABC berechnen: und sind ferner aus jedem Punkte D die Winkel ADB und BDC beobachtet; so werden auch die Dreyecke ADB und BDC durch die Kreise ABD und DBC nach Nro. 186. bestimmt, und lassen sich, wie folgt, berechnen.

1tens weil die halbe Sehne in jedem Kreise dem Sinusse des Winkels beym Umfange, welcher auf der Sehne ru-

ruhet, gleich ist; so findet man die Halbmesser MB und NB, wenn man sagt: es verhält sich

$$\text{Sin. } BDC : \frac{BC}{2} = \text{Halbm.} : MB \text{ und}$$

$$\text{Sin. } BDA : \frac{AB}{2} = \text{Halbm.} : NB$$

2tens weil MBC das Komplement von BDC und NBA jenes von ADB ist; so erhält man aus der allzeit bekannten Summe DBA + DBC, und den Komplementen MBC und NBA den Winkel NBM.

3tens findet man durch das Dreyeck NBM nach Nro. 260. oder 262. die Winkel BMN und BNM, folglich auch ihre Komplemente MBD und NBD.

4tens geben die Winkel MBD und MBC den Winkel DBC, und die Winkel NBD und NBA den Winkel DBA.

5tens werden endlich die Dreyecke DBA und DBC nach Nro. 257. berechnet.

281. Stellet man sich lieber durch die zween äußersten Punkte A und C und den Punkt D nur einen Kreis und den Durchschnitt X der Geraden DB vor; so kann man, wie folgt, verfahren. Fig. 56.

1tens weil der Winkel XCA = XDA, der Winkel XAC = XDC, und die Seite AC bekannt sind; so findet man durch das Dreyeck AXC die Seiten AX und CX.

2tens geben die Winkel XAC und CAB den Winkel XAB, und die Winkel XCA und ACB den Winkel XCB.

3tens findet man nach Nro. 260. oder 262. durch das Dreyeck XAB den Winkel AXB = ACD und durch das Dreyeck XCB den Winkel CXB = CAD. Zur Probe der Rechnung müßen die Winkel CAD + ACD + ADC 180° ausmachen.

4tens geben die Winkel ACD und ACB den Winkel BCD und die Winkel CAD und CAB den Winkel BAD.

5tens werden wieder die Dreyecke ABD und CBD nach Nro. 257. berechnet.

Ist z. B. in dem Dreyecke ABC

AB = 5104 Klafter
BC = 4637 Klafter
B = 116° 39′ 18″
so ist A + C = 63° 20′ 42″

Daher verhält sich nach Nro. 262. 1tens

$$9741 : 467 = \text{Tan.} \frac{A + C}{2} : \text{Tan.} \frac{C - A}{2}.$$

Es ist aber

$$\text{Log. Tang.} \frac{A + C}{2} = 9.7902497$$
$$\text{Log. } 467 = 2.6693169$$
$$\text{Summe} = 12.4595666$$
$$\text{Log. } 9741 = 3.9886035$$
$$\text{also Log. Tang.} \frac{C - A}{2} = 8.4709631$$
$$\frac{C - A}{2} = 1° \; 41' \; 39''$$
$$C = 33° \; 22' \; 0''$$
$$\text{und } A = 29° \; 58' \; 42''$$

2tens verhält sich

Sin. C : AB = Sin. B : AC.

Es ist aber Log. Sin. B = 9.9512033
Log. AB = 3.7079107
Summe = 13.6591140
Log. Sin. C = 9.7403587
also Log. AC = 3.9187553
und AC = 8293°. 83

Sind nun die beobachteten Winkel

BDA = 36° 15′ 37″
und BDC = 30° 40′ 8″;

so ist in dem Dreyecke ACX der Winkel

A

$A = 30° 40' 8''$
$C = 36° 15' 37''$
und $X = 113° 4' 15''$.

Daher verhält sich 1tens

Sin. X : AC = Sin. C : AX

Es ist aber Log. Sin. C	=	9.7719212
Log. AC	=	3.9187553
Summe	=	13.6906765
Log. Sin. X	=	9.9637977
also Log. AX	=	3.7268788
und AX	=	5331.86

2tens verhält sich

Sin. X : AC = Sin. A : CX.

Es ist aber Log. Sin. A	=	9.7076348
Log. AC	=	3.9187553
Summe	=	13.6263901
Log. Sin. X	=	9.9637977
also Log. CX	=	3.6625924
und CX	=	4598.24

In dem Dreyecke BCX wird der Winkel

$C = 69° 37' 37''$.

Daher verhält sich nach Nro. 260. 1tens

Halbm. : CX = Sin. C : XO

Es ist aber Log. Sin. C	=	9 9719461
Log. CX	=	3.6625924
also Log. XO	=	3.6345385

2tens verhält sich

Halbm. : CX = Kos. C : CO

Es ist aber

Log. Kos. C	=	9.5417429
Log. CX	=	3.6625924
also Log. CO	=	3.2043353
CO	=	1600.79
und BO	=	3036.21

3tens

3tens verhält sich

BO : Halbm. = XO : Tang. B

Es ist aber

die Summe = 13.6345385
Log. BO = 3.4823318

also Log. Tang. B = 10.1522067
B = 54° 50′ 26″
und DXC = DAC = 55° 31′ 57″

In dem Dreyecke BAX wird der Winkel

A = 60° 38′ 50″.

Daher verhält sich wieder 1tens

Halbm. : AB = Sin. A : BO

Es ist aber

Log. Sin. A = 9.9403262
Log. AB = 3.7079107

also Log. BO = 3.6482369

2tens verhält sich

Halbm. : AB = Kos. A : AO

Es ist aber

Log. Kos. A = 9.6903605
Log. AB = 3.7079107

also Log. AO = 3.3982712
AO = 2501.91
und XO = 2829.95

3tens verhält sich

XO : Halbm. = BO : Tang. X

Es ist aber

die Summe = 13.6482369
Log. XO = 3.4517787

also Log. Tang. X = 10.1964582
und DXA = DCA = 57° 32′ 19″

Daher wird in dem Dreyecke ABD der Winkel

A = 25° 33′ 15″
D = 36° 15′ 37″
und B = 118° 11′ 8″

folg.

folglich verhält sich 1tens

Sin. D : AB = Sin. B : AD

Es ist aber

Log. Sin. B = 9.9451842
Log. AB = 3.7079107

Summe = 13.6530949
Log. Sin. D = 9.7719212

also Log. AD = 3.8811737
und AD = 7606.30

2tens verhält sich

Sin. D : AB = Sin. A : BD

Es ist aber

Log. Sin. A = 9.6348440
Log. AB = 3.7079107

Summe = 13.3427547
Log. Sin. D = 9.7719212

also Log. BD = 3.5708335
und BD = 3722.49

Endlich wird in dem Dreyecke CBD der Winkel

C = 24° 10′ 19″
D = 30° 40′ 8″
und B = 125° 9′ 33″.

Daher verhält sich 1tens

Sin. D : BC = Sin. B : DC

Es ist aber

Log. Sin. B = 9.9125372
Log. BC = 3.6662371

Summe = 13.5787743
Log. Sin. D = 9.7076348

also Log. DC = 3.8711395
und DC = 7432.58

2tens verhält sich

Sin. D : BC = Sin. C : BD

Es ist aber

Log. Sin. C	=	9.6122288
Log. BC	=	3.6662371
Summe	=	13.2784659
Log. Sin. D	=	9.7076348
also Log. BD	=	3.5708311
und BD	=	3722.47

wie zuvor.

Fig. 507. Fig. 507. wird anstatt der Dreyecke DBA und DBC nur das Dreyeck ADC durch die 3 bekannten Winkel und die Seite AC berechnet.

282. Die zwote und dritte Methode erfodern augenscheinlich viel mehr Rechnung als die erste. Bei jenen kommen jedesmal Tangenten, auf deren Schärfe man sich bey den 90° nahen Winkeln nach Nro. 263. nie verlassen darf, in die Rechnung, da bey dieser alles immer bloß durch Sinusse bestimmet wird. Ferner kann man bey der ersten Methode allemal mehrere und leichtere Proben als bey der zwoten und dritten anstellen. Daher soll man sich der zwo letztern Methoden so wenig, als es immer möglich ist bedienen.

283. Sobald einige Dreyecke berechnet sind, und man sich durch verschiedene Proben von der Richtigkeit der Beobachtung sowohl als der Berechnung versichert hat; so werden sie einer Tabelle von vier Reihen in folgender Ordnung eingetragen.

Die erste Reihe enthält die Namen der drey Winkel eines jeden Dreyeckes, und die zwote Reihe die Grade, Minuten und Sekunden derselben, in der dritten Reihe werden die Logarithmen der vier Glieder einer jeden Proportion so untereinander geschrieben, daß jener des dritten Gliedes die erste, jener des zweyten Gliedes die zwote, ihre Summe die dritte, der Logarithme des ersten Gliedes die vierte, nnd jener des vierten Gliedes die fünfte Zeile ausmacht, in der vierten Reihe folgen endlich die drey Seiten des Dreyeckes. Der Namen eines jeden Winkels, die Grade Minuten und Sekunden desselben, die

ihm

ihm entgegengesetzte Seite und ihr Logarithme müssen allemal in derselben Zeile stehen.

Diesemnach kommen die Nro. 266. berechneten Dreyecke, wie folget, zu stehen.

Fig. 494.

Namen der Winkel	Grade, Minuten und Sekunden.	Logarithmen der vier Glieder der Proportion	Seiten des Dreyeckes
ç.	49° 38′ 36″	9.9731778 3.6596310	4567.00
		13.6328088 9.8819710	
a.	70° 4′ 11″	3.7508378	5634.27
		9.9387791 3.6596310	
		13.5984101 9.8819710	
b.	60° 17′ 13″	3.7164391	5205.22
d.	90° 23′ 40″	9.9345050 3.7164391	5205.22
		13.6509441 9.9999897	
c.	59° 19′ 5″	3.6509544	4476.66
		9.7027227 3.7164391	
		13.4191618 9.9999897	
a.	30° 17′ 15″	3.4191721	2625.26

f.	39° 27′ 13″	9.9920681 3.6509544	4476.66
		13.6430225 9.8030836	
d.	79° 4′ 58″	3.8399389	6917.33
		9.9437486 3.6509544	
		13.5947030 9.8030836	
a.	61° 27′ 49″	3.7916194	6188.98
h.	46° 26′ 54″	9.9452033 3.6596310	4567.00
		13.6048343 9.8601902	
b.	61° 49′ 9″	3.7446441	5554.49
		9.9775423 3.6596310	
		13.6371733 9.8601902	
a.	71° 43′ 57″	3.7769831	5983.88
g.	57° 19′ 31″	9.9018575 3.7446441	5554.49
		13.6465016 9.9251826	
h.	52° 54′ 51″	3.7213190	5264.04
		9.9723209 3.7446441	
		13.7169650 9.9251826	
a.	60° 45′ 38″	3.7917824	6191.31

f.

f.	47° 32′ 2″	9.9220370 3.7213190	5264.04
		13 6433560 9.8678661	
a.	56° 41′ 10″	3.7754899	5963.34
		9.9864849 3.7213190	
		13.7078039 9.8678661	
g.	75° 46′ 48″	3.8399378	6917.32

Von der ganzen Rechnung, welche man beym Centriren, oder bey der zwoten oder dritten Methode zu machen hat, trägt man dieser Tabelle nur allein die am Ende berechneten nöthigen Dreyecke ebenso wie die vorigen ein. Folgende Tabelle enthält zum Beyspiele das Dreyeck ABD Nro. 276, die Dreyecke ABD und ADC Nro. 278, die Dreyecke ACD und ADB Nro. 279. und endlich die Dreyecke ABD und CBD Nro. 281. so wie sie von jeder Rechnung sollen eingetragen werden.

D.	113° 5′ 39″	9 7492983 3.7386220	5478.00
		13.4879203 9.9637224	
B.	34° 9′ 18″	3.5241979	3343.47
		9.7331866 3.7386220	
		13.4718086 9.9637224	
A.	32° 45′ 3″	3.5080862	3221.70

Fig. 501.

D.

Fig.				
Fig. 503.			9.7372801	
	D.	52° 14′ 41″	3.8318352	6789.46
			13.5691153	
			9.8979750	
	A.	33° 6′ 2″	3.6711403	4689.65
			9.9985652	
			3.8318352	
			13.8304004	
			9.8979750	
	B.	94° 39′ 17″	3.9324254	8559.05
			9.9611871	
	C.	81° 40′ 57″	3.9324254	8559.05
			13.8936125	
			9.9954078	
	A.	66° 8′ 9″	3.8982047	7910.51
			9.7264056	
			3.9324244	
			13.6588310	
			9.9954078	
	D.	32° 10′ 54″	3.6634232	4607.05
Fig. 503. 504.			9.7264056	
	A.	66° 8′ 9″	3.9038921	8014.79
			13.6302977	
			9.9611871	
	D.	32° 10′ 54″	3.6691106	4667.78
			9.9954077	
			3.9038921	
			13.8992998	
			9.9611871	
	C.	81° 40′ 57″	3.9381127	8671.86

B.

B.	94° 39′ 17″	9.7372801	
		3.9381127	8671.86
		13.6753928	
		9.9985652	
A.	33° 6′ 2″	3.6768276	4751.46
		9.8979750	
		3.9381127	
		13.8360877	
		9.9985652	
D.	52° 14′ 41″	3.8375225	6878.95
		9.9451842	
D.	36° 15′ 37″	3.7079107	5104.00
		13.6530949	
		9.7719212	
B.	118° 11′ 8″	3.8811737	7606.30
		9.6348440	
		3.7079107	
		13.3427547	
		9.7719212	
A.	25° 33′ 15″	3.5708335	3722.49
		9.9125372	
D.	30° 40′ 8″	3.6662371	4637.00
		13.5787743	
		9.7076348	
B.	125° 9′ 33″	3.8711395	7432.58
		9.6122288	
		3.6662371	
		13.2784659	
		9.7076348	
C.	24° 10′ 19″	3.5708311	3722.47

Fig. 506.

In einer solchen Tabelle wird jede Seite durch die zween Scheitel, welche nicht in ihrer Zeile stehen, erkennt; ihr Logarithme und der entgegengesetzte Winkel befinden sich mit ihr in derselben Zeile: der Logarithme des ersten Winkels macht in beeden Proportionen die vierte Zeile aus, und die erste Zeile einer jeden Proportion ist der Logarithme des Winkels, welcher in der fünften Zeile steht.

Von der Methode die berechneten Dreyecke dem Meßtische aufzutragen.

Fig. 508. 284. Bringt man an einer viereckigten 2, 3, oder mehr Schuhe langen Stange A B zwo Zirkelspitzen m und n so an, daß man sie längst der Stange hin und her schieben, und vermittelst der vertikalen Schrauben c und d, wo man will, an die Stange befestigen kann; so wird dieses Instrument ein **Stangenzirkel** genennt. Die eine Spitze n ist noch mit einer horizontalen Schraube o, wodurch sich die Oeffnung m n um etwas weniges verlängern oder verkürzen läßt, versehen.

Fig. 509. Soll man eine jede Nro. 266. berechnete Figur a b c d einem Meßtische auftragen; so verfährt man nach Nro. 171, wenn man 1tens längst einem frischabgezogenen Lineal die Gerade a b zieht, mit dem Stangenzirkel auf dem verjüngten Maßstabe 4567 Klafter fasset und von a in b trägt, 2tens die eine Spitze des auf 5634°. 27 eröffneten Stangenzirkels in b einsetzet, und mit der andern Spitze einen Bogen m n beschreibt, und 3tens in diesem Bogen mit der Eröffnung 5205° . 22 aus a den Punkt c bestimmet.

Der Punkt d wird durch a und c, ebenso wie der Punkt c durch a und b, nach dem 2ten Dreyecke ausfindig gemacht.

Fig. 510. 285. Soll man dieselbe Figur nach Nro. 172. auftragen; so stellet man sich die auf a b Senkrechte a p und die mit a b Gleichlaufenden c m und d n vor, und berechnet

net die rechtwinklichten Dreyecke a c m und a d n, in welchen nebst den Hypothenusen a c und a d die spitzen Winkel bey a bekannt sind.

Nach der Tabelle Nro. 283. sind in dem Dreyecke a c m die Winkel

$$a = 19^\circ\ 55'\ 49''$$
$$c = 70^\circ\ 4'\ 11''$$
$$\text{und } m = 90^\circ\ 0'\ 0''$$

Daher verhält sich 1tens

Halbmesser : a c = Sin. a : c m

Es ist aber

Log. Sin. a = 9.5325969
Log. a c = 3.7164391

also Log. c m = 3.2490360
und c m = 1774°.34

2tens verhält sich

Halbm. : a c = Sin. c : a m

Es ist aber

Log. Sin. c = 9.9731778
Log. a c = 3.7164391

also Log. a m = 3.6896169
und a m = 4893°.47

In dem Dreyecke a d n sind die Winkel

$$a = 10^\circ\ 21'\ 26''$$
$$d = 79^\circ\ 38'\ 34''$$
$$\text{und } n = 90^\circ\ 0'\ 0''$$

Daher verhält sich 1tens

Halbm. : a d = Sin. a : d n

Es ist aber

Log. Sin. a = 9.2547527
Log. a d = 3.6509544

also Log. d n = 2.9057071
und d n = 804°.83

2tens verhält sich

Halbm. : a d = Sin. d : a n

Es ist aber

$$\text{Log. Sin. } d = 9.9928653$$
$$\text{Log. } ad = 3.6509544$$
$$\text{also Log. } an = 3.6438197$$
$$\text{und } an = 4403^{\circ}.72$$

Fig. 511. Zeichnet man nun auf dem Meßtische nach Nro. 89. ein Rechteck $xyzu$, nimmt den Punkt a an und zieht ap mit xu und ab mit xy gleichlaufend; so kann man ab, an und am auftragen, die mit xy Gleichlaufenden nd und mc ziehen, und in diesen nach voriger Rechnung noch die Punkte d und c bestimmen.

Fig. 512. 286. Nimmt man den Winkel pab schief an, und stellet sich die auf ap Senkrechten cm, dn und bo vor; so lassen sich die rechtwinklichten Dreyecke acm, adn, und abo wieder wie zuvor berechnen.

Ist z. B. der Winkel $pab = 76^{\circ}\ 13'\ 50''$; so wird nach der Tabelle Nro. 283. in dem Dreyecke acm der Winkel

$$a = 6^{\circ}\ 9'\ 39''$$
$$c = 83^{\circ}\ 50'\ 21''$$
$$\text{und } m = 90^{\circ}\ 0'\ 0''$$

Daher verhält sich 1tens

$$\text{Halbm.} : ac = \text{Sin. } a : cm$$

Es ist aber

$$\text{Log. Sin. } a = 9.0306792$$
$$\text{Log. } ac = 3.7164391$$
$$\text{also Log. } cm = 2.7471183$$
$$\text{und } cm = 558^{\circ}.62$$

2tens verhält sich

$$\text{Halbm.} : ac = \text{Sin. } c : am$$

Es ist aber

$$\text{Log. Sin. } c = 9.9974845$$
$$\text{Log. } ac = 3.7164391$$
$$\text{also Log. } am = 3.7139236$$
$$\text{und } am = 5175^{\circ}.16$$

In

In dem Dreyecke adn sind die Winkel

$a = 24° \; 7' \; 36''$
$d = 65° \; 52' \; 24''$
und $n = 90° \; 0' \; 0''$

Daher verhält sich 1tens

Halbm. : ad = Sin. a : dn

Es ist aber

Log. Sin. a = 9.6114633
Log. ad = 3.6509544

also Log. dn = 3.2624177
und dn = 1829°.86

2tens verhält sich

Halbm. : ad = Sin. d : an

Es ist aber

Log. Sin. d = 9.9603014
Log. ad = 3.6509544

also Log. an = 3.6112558
und an = 4085°.60

In dem Dreyecke abo sind die Winkel

$a = 76° \; 13' \; 50''$
$b = 13° \; 46' \; 10''$
und $o = 90° \; 0' \; 0''$

Daher verhält sich 1tens

Halbm. : ab = Sin. a : bo

Es ist aber

Log. Sin a = 9.9873361
Log. ab = 3.6596310

also Log. bo = 3.6469671
und bo = 4435°.75

2tens verhält sich

Halbm. : ab = Sin. b : ao

Es ist aber Log. Sin. b = 9.3766053
Log. ab = 3.6596310

also Log. ao = 3.0362363
und ao = 1087°.02

Fig. 513. Nimmt man nun den Punkt a wieder in einer beliebigen Geraden a p an, trägt a o, a n und a m auf, und zieht auf a p die Senkrechten o b, n d und m c; so kann man in diesen nach der letztern Berechnung die Punkte b, c, und d bestimmen, und so die verlangte Figur a b c d wie zuvor erhalten.

Fig. 514. 287. Endlich trägt man nach Nro. 173. M. 1. Th. auf, wenn man den ganzen Meßtisch mit gleichen Quadraten, deren Seiten eine beliebige Anzahl Klaftern haben, überzieht, einen Scheitel dieser Quadrate für a und eine aus den Gleichlaufenden für a p annimmt, und jeden andern Punkt dem nach vorhergehender Berechnung zugehörigen Quadrate vermittelst des Handzirkels einträgt.

Ist z. B. die Seite der Quadrate $= 1000$ Klafter; so wird nach der letztern Berechnung 1tens der Punkt c aufgetragen, wenn man über die 5te mit a y Gleichlaufende beederseits auf den Seiten x u und y z des Rechteckes $175^\circ . 16$ aufträgt, durch diese Punkte in dem 1ten Quadrate rechts an a p eine gerade Linie zieht, und diese $558^\circ . 62$ gleich macht. 2tens wird der Punkt d bestimmt, wenn man über die 4te mit a y Gleichlaufende auf den Seiten x u und y z beederseits $85^\circ . 60$ aufträgt, durch diese Punkte in dem 2ten Quadrate links an a p eine gerade Linie zieht, und diese von $829^\circ . 86$ nimmt. 3tens wird der Punkt b gefunden, wenn man über die 1te mit a y Gleichlaufende beederseits $87^\circ . 02$ aufträgt, durch diese Punkte in dem 5ten Quadrate rechts an a p eine gerade Linie zieht, und diese $435^\circ . 75$ gleich macht.

Fig. 494. Ebenso kann jede Figur a d f g nach einer auf jede Seite a d beliebig angenommenen senkrechten oder schiefen geraden Linie berechnet und aufgetragen werden.

Fig. 515. 288. Sollen nebst den Punkten a, b, c, d, auch die Punkte e, s, r für denselben Meßtisch berechnet und aufgetragen werden, und man stellet sich eine mit a p Gleichlaufende c q vor; so giebt der Winkel p a c von 180° abgezogen den Winkel q c a; da nun alle Winkel, welche die Geraden c e, c s, c r mit der Geraden a c

ma-

machen, bekannt sind; so werden es auch die Winkel, welche ebenjene Geraden mit der Gleichlaufenden c q machen.

Berechnet man also wieder wie zuvor die rechtwinklichten Dreyecke c s y, c r x und c e u; so wird 1tens aus c m und s y die Entfernung s 1 und aus a m und c y die Entfernung a 1 bekannt, 2tens findet man aus c m und r x die Entfernung r 2 und aus a m und c x die Entfernung a 2, 3tens erhält man durch c m und e u die Entfernung e 3, und durch a m und c u die Entfernung a 3, endlich werden nach diesen Entfernungen a 1 und s 1, a 2 und r 2, a 3 und e 3 die Punkte s, r und e wie die vorigen aufgetragen.

Stellet man sich ferner durch s mit a p eine Gleichslaufende s o vor; so findet man durch den Winkel q c s auch den Winkel o s c: folglich lassen sich wieder alle aus s beobachteten Punkte nach der Gleichlaufenden s o berechnen, und sodann vermittelst der Entfernungen a 1 und s 1 nach der Geraden a p bestimmen und auftragen.

289. Berechnet man so das ganze Netz der aufgenommenen Dreyecke nach einer und derselben Geraden a p, und nennt die Entfernungen vorwärts auf der Geraden a p gegen Nord, die entgegengesetzten gegen Sud, die Senkrechten rechts auf a p gegen Ost und jene links auf a p gegen West; so läßt sich das ganze Netz in eine Tabelle von drey Reihen verfassen. Die erste Reihe dieser Tabelle enthält die Namen der Puncte, in die zwote kommen die Entfernungen gegen Nord oder Sud, und in die dritte die Senkrechten gegen Ost oder West.

Gesetzt, folgende Tabelle wäre nach der Geraden a z berechnet; so kömmt sie, wie folgt, zu stehen. Fig. 516.

Entf.	gegen Nord.	gegen Ost.
a.	0.	0
b.	0.	5237.45
d.	1516.42	9456.47
c.	1837.05	1832.82
e.	3197.12	6045.30
f.	4757.31	10947.52
g.	5422.88	822.90
h.	6437.94	5799.90
Entf.	gegen Süd.	gegen Ost.
b°.	1744.50	9532.28
y.	1920.92	2234.37
x.	2832.06	5789.09
a°.	4197.89	4061.70
u.	4976.21	9004.31
t.	6439.17	3610.81
s.	9830.07	6920.04
r.	10240.93	1402.00
Entf.	gegen Süd.	gegen West.
m.	504.52	1521.21
n.	2498.70	6230.09
o.	4589.90	3877.88
p.	7011.21	402.34
q.	9773.54	3005.24
Entf.	gegen Nord.	gegen West.
l.	2000.47	8878.42
k.	3005.30	5423.91
c.	6656.06	4231.66

Ist

Ist diese Tabelle einmal fertig, und man stellet sich durch h eine mit a z Gleichlaufende h.25 vor; so giebt h.8 von f6, e5 und d1 abgezogen

f.23 = 5147.62
e.24 = 245.40
d.25 = 3656.57

und a6, a5 und a1 von a8 abgezogen, giebt

h.23 = 1680.63
h.24 = 3240.82
h.25 = 4921.52

Folglich läßt sich die Figur hedf nach der Gleichlaufenden h.25 ebenso wie Nro. 285, 286, oder 287 die Figur abcd nach der Geraden ap auftragen.

Eben so leicht lassen sich die Punkte g, h, e, c für einen andern Tisch nach der Gleichlaufenden g.26 bestimmen und auftragen u. s. f.

Nimmt man zur Berechnung der Senkrechten einer jeden Figur für jeden Tisch eine besondere Gerade an; so muß jeder Punkt, der mehrern Meßtischen gemein ist, mehrmal berechnet werden. Berechnet man aber alle Punkte des ganzen Netzes nach den Senkrechten auf eine und dieselbe Gerade; so ist es hinlänglich, wenn man die Senkrechten für jeden Punkt nur einmal bestimmt. Und verfährt man nach dieser letzten Methode; so werden alle auf dem Felde nach jeden zween Punkten gerichteten Tische miteinander gleichlaufend stehen. Dieses trägt nicht wenig zur gleichförmigen Zeichnung bey.

Von der Methode die aufgetragenen Figuren auszuarbeiten, und in eine Karte zu bringen.

290. Nachdem man einem Tische soviel Punkte, als der Maßstab zuläßt, aufgetragen hat, und man stellet denselben über einen aus diesen Punkten, und richtet ihn nach einem andern; so muß er auch nach allen übrigen Punkten eintreffen. Sieht man also auf einen neuangenom-

nom-

nommenen und schneidet ihn rückwärts ein; so läßt sich übrigens der ganze Tisch nach den in der Geometrie vielfältig gegebenen Regeln ausarbeiten.

Läßt sich der Tisch über keinen aus den aufgetragenen Punkten stellen; so stecket man zwischen zweenen nach Nro. 13. M. 1. Th. eine gerade Linie aus der Mitte aus, richtet den Tisch nach Nro. 165. darüber, und schneidet die Gerade, welche die gleichnamigten Punkte verbindet, nach Nro. 187. durch einen dritten Punkt rückwärts ein.

Diese Methode ist den Nro. 186. angeführten oberwähnter Ursache wegen allzeit vorzuziehen. Kann man in demselben Falle nur zween Punkte sehen; so muß man unumgänglich nach Nro. 188. verfahren.

Ist einmal das ganze Netz der Dreyecke durch mehrere Tische aufgenommen; so kann man die einzelnen Aufnahmen nach Nro. 189. zusammenkleben, oder besser soviel weiße Bögen Papier, als zur ganzen Karte vonnöthen sind, zusammenleimen und auf einer zu diesem Ende verfertigten Tafel anspannen, sodann die ganze Tafel vermittelst des Stangenzirkels in Quadrate eintheilen, alle trigonometrisch-berechneten Punkte nach der Tabelle Nro. 289. auftragen, und endlich jede einzelne Aufnahme zwischen die ihr zugehörigen Punkte abzeichnen.

Von der Methode den Grund einer Karte für allzeit unabänderlich zu erhalten.

291. Eine so verfertigte Landkarte ist ganz gewiß so zuverläßig, als sie nur immer seyn kann. Allein ganz ohne Fehler wird sie nie zu Stande gebracht. Es ist auch hier nur darum zu thun, daß die Fehler so wenig und klein, als es Menschen möglich ist, werden. Wird die Karte abgezeichnet oder gestochen, verkleinert oder vergrößert; so schleichen sich allemal wieder mehrere und größere Fehler ein.

Kurz, alles, was man durch Zeichnung verrichtet, ist gefehlt, und was man durch wiederholte Zeichnung

ändert oder fortsetzet, kann nie genauer, sondern nur unzuverläßiger ausfallen. Nimmt man also ein Land trigonometrisch auf, und bewahret nichts davon als die verfertigte Karte; so geht dabey das Wesentlichste die Tabelle der berechneten Dreyecke und jene der Senkrechten auf eine und dieselbe Gerade, die allein für allzeit unveränderlich bleiben, zu Grunde.

Will man von einer trigonometrischen Aufnahme den wahren Vortheil, der allein so vielfältige Mühe und große Unkosten ersetzen kann, ziehen; so müßen nebst einer genauen Beschreibung aller trigonometrisch-bestimmten Punkte die berechneten Tabelle für das ganze Land dem Archive ebendesselben, und eine für jeden Kreis dem Archive dieses Kreises eingereichet, und darinn auf allezit bewahret werden. Ferner müssen alle auf dem Felde gewählten Scheitel der Dreyecke mit einer steinernen oder hölzernen Säule, die ein oder mehrere Schuh über das Erdreich heraussteht, und auf welcher der Namen ihrer Punktes eingehauen ist, bezeichnet, und nach den nächstgelegenen Dörfern beschrieben werden. Die Richter ebendieser Dörfer müßen die Namen der Zeichen und ihre Beschreibung bey sich schriftlich bewahren, und für ihre Erhaltung und Erneuerung sorgen und haften, so daß man auf höchsten Befehl wieder jeden Punkt durch des Richters Anzeige, so oft man will, finden kann.

In jedem Kreise hält eine obrigkeitliche Person z. B. der Kreisingenieur ein wachtbares Aug über alle in demselben Kreise befindlichen Punkte, visitirt alle Zeichen jede zwey oder drey Jahre, und hält die Richter zu ihrer Ergänzung oder Wiederherstellung an.

Dadurch erhält man einen in bl...n Ziffern bewahrten richtigen Grund zu allen Karten, die man auch in künftigen Zeiten zu verschiedenen Absichten verfertigen, erneuern oder berichtigen kann. Alle geometrischen Unternehmungen können sodann in dem ganzen Lande durch Hilfe so vieler bekannten Linien geschwinder, zuverläßiger, und mit viel weniger Mühe und Unkosten ausgeführet werden.

Von

also um eine Minute größer oder kleiner als jeder Theil des Bogens AB.

Sind die Theile des Bogens AB Drittelgrade, und man theilt 1tens den Bogen ab = 21 oder 19 solchen Theilen in 20 gleiche; so enthält jeder Theil des Bogens ab $\frac{21 \times 20}{20} = 21'$ oder $\frac{19 \times 20}{20} = 19'$.

Oder theilt man 2tens den Bogen ab = 41 oder 39 solchen Theilen in 40 gleiche; so enthält jeder Theil des Bogens AB $\frac{41 \times 20}{40} = 20\frac{1}{2}'$, oder $\frac{39 \times 20}{40} = 19\frac{1}{2}'$.

Folglich wird jeder Theil des Bogens ab im ersten Falle um eine Minute, und im zweyten Falle um eine halbe Minute größer oder kleiner als jeder Theil des Bogens AB.

Sind die Theile des Bogens AB Viertelgrade, und man theilt 1tens den Bogen ab = 16 oder 14 solchen Theilen in 15 gleiche; so enthält jeder Theil des Bogens ab $\frac{16 \times 15}{15} = 16'$, oder $\frac{14 \times 15}{15} = 14'$.

Oder theilt man 2tens den Bogen ab = 31 oder 29 solchen Theilen in 30 gleiche; so enthält jeder Theil des Bogens ab $\frac{31 \times 15}{30} = 15\frac{1}{2}'$ oder $\frac{29 \times 15}{30} = 14\frac{1}{2}'$.

Oder theilt man endlich 3tens den Bogen ab = 46 oder 44 solchen Theilen in 45 gleiche; so enthält jeder Theil des Bogens ab $\frac{46 \times 15}{45} = 15\frac{1}{3}'$, oder $\frac{44 \times 15}{45} = 14\frac{2}{3}'$.

Folglich wird jeder Theil des Bogens ab im ersten Falle um eine Minute, im 2ten Falle um 30 Sekunden, und im 3ten Falle um 20 Sekunden größer oder kleiner als jeder Theil des Bogens AB.

294. PQ sey ein Stück eines Winkelmessers, worauf der Bogen AB in Drittelgrade eingetheilet ist. R sey ein Stück des um den Mittelpunkt des Win-

Fig. 519.

Winkelmessers beweglichen Lineals, auf welchem der Bogen ab = 11 Theilen des Bogens AB in 10 gleiche getheilet ist, daß folglich jeder Theil des Bogens ab um 2 Minuten größer als jeder Theil des Bogens AB ist.

Der Bogen ab wird von den Erfindern dieser Art Eintheilungen **Nonius** oder **Vernier** genennt, der Bogen AB heiße **Rand** des Winkelmessers. Der Anfangsstrich der Eintheilung des Verniers sowohl als des Randes wird mit 0 bezeichnet. Der auf dem Rande heiße **Nullpunkt** und jener auf dem Vernier **Zeiger**. Die Theile des Randes werden ferner nach einer Seite und jene des Verniers nach der entgegengesetzten gezählet.

Wird das Lineal um den Mittelpunkt des Randes gedreht, so daß der Zeiger von dem Nullpunkte an bis auf den Theilstrich des 20sten Grades kömmt; so beschreibt auch jede mit dem Lineal befestigte Gesichtslinie genau einen Winkel von 20 Graden: und rücket man das Lineal weiter fort, so daß die Theilstriche 1 und n, 2 und m, 3 und 19, 4 und r nacheinander übereinkommen; so wird jener Winkel bey jeder Uebereinstimmung dieser Theilstriche um 2 Minuten wachsen.

Wäre jeder Theil des Verniers nur um eine, oder eine halbe Minute größer als jeder Theil des Randes; so würde der Winkel ebenso bey jeder Uebereinstimmung jener Theilstriche um eine oder um eine halbe Minute zunehmen.

Kurz, ehe der Zeiger auf den ersten Theilstrich s kömmt, werden alle Theilstriche des Verniers nacheinander mit ihren nächsthöhern Theilstrichen des Randes übereinstimmen. Folglich läßt sich der Winkel, nach dem der Vernier = 11, = 21, oder = 41 Theilen des Randes in 10, in 20 oder in 40 gleiche getheilet ist, zu jeden zwo Minuten, zu jeder Minute, oder jeder halben Minute angeben, wenn man nämlich die Grade und Minuten von dem Nullpunkte an bis zu den übereinstimmenden Theilstrichen auf dem Rande und von ebendiesen Theilstrichen an bis zu dem Zeiger auf dem Vernier zählet.

Im Falle der Fig. 520. findet man auf dem Rande 19° 20' und auf dem Vernier $4 \times 22' = 88' = 1°$ 28', also für den ganzen durch den Zeiger von dem Nullpunkte an beschriebenen Bogen 20° 48'. Fig. 520.

Wäre jeder Theil des Verniers nur um eine Minute oder nur um eine halbe Minute größer als jeder Theil des Randes; so würde man in derselben Stellung des Lineals auf dem Vernier $4 \times 21' = 1° 24'$, oder $4 \times 20\frac{1}{2} = 1° 22'$, also in allem 20° 44' oder 20° 42' zählen.

Von der Migrometerschraube.

295. Wird eine horizontale Schraube ab von sehr feinen und gleichen Gängen mit dem Lineal R vermittelst des Ansatzes y und des Schraubenstockes x so verbunden, daß sie nach gelöstem Schräubchen c sich mit dem Lineal auf dem Rande ringsum beweget, und nach angezogenem Schräubchen c, das Lineal ganz langsam um den Mittelpunkt drehet; so kann diese Schraube anstatt des Verniers dienen. Fig. 521.

Denn stellet man den Zeiger genau auf einen Theilstrich des Randes, und zieht das Schräubchen c an; schiebt sodann das Lineal durch die Schraube ab, bis der Zeiger mit dem nächsten Theilstriche übereinkömmt, zurücke, und beobachtet die Anzahl der Umdrehungen der an der Schraube ab befestigten Scheibe b; so erfährt man, um wieviel jede Umdrehung der Schraube ab das Lineal verschiebet, wenn man die Minuten jenes Theiles des Randes durch die Anzahl der Umdrehungen dividirt. Gesetzt man habe die Scheibe b 10mal umgedrehet, bis der Zeiger auf dem Rande einen halben Grad beschrieben hat; so beträgt jede Umdrehung 3 Minuten, eine halbe Umdrehung $1\frac{1}{2}$ Minute, ein drittel Umdrehung 1 Minute, ein viertel Umdrehung 45 Sekunden u. s. f.

Damit man die Anzahl der Umdrehungen und die Theile einer Umdrehung der Schraube ab genau beobachten kann, wird

wird die Scheibe b in eine gewisse Anzahl gleicher Theile z. B. in 60 getheilt, und auf dem Schraubenstocke x ein Weiser d befestiget.

Da nun jede Umdrehung 3′ austrägt; so giebt ein Theil einer Umdrehung 3″, zween Theile 6″, drey Theile 9″ u. s. f.

Ist der Zeiger des Lineals von dem Nullpunkte des Randes an bis in die Stelle der Figur beweget worden; so erhält man den Bogen, welchen der Zeiger durchzulaufen hat, wenn man das Schräubchen c anzieht, durch die Schraube a b den Zeiger auf den nächst niedrigern Theilstrich r zurückeführt, die Umdrehungen der Scheibe b in Minuten und Sekunden verwandelt, und zu 20° 20′ addirt. Hat man z. B. $5\frac{7}{60}$ Umdrehungen der Scheibe b gebraucht; so betragen diese 15′ 21″, folglich wird der verlangte Bogen = 20° 35′ 21″.

Eine solche Schraube a b wird **Migrometerschraube** genennt. Man verbindet zu mehrerer Befestigung den Schraubenstock x mit einer starken horizontalen Platte n, welche auf eine in dem Lineal gemachte gleich große Oefnung passet, und sich, da der Schraubenstock x dem Lineal näher kömmt, darein verschiebet.

Die Migrometerschraube giebt zwar die Winkel viel schärfer als der Vernier an: doch wird sie, weil die Schraubengänge durch starken Gebrauch abgenützet werden, wieder unzuverläßiger als dieser.

Fig. 522. 296. Verbindet man das Lineal auf einer Seite mit einem Vernier, der die Minuten giebt, und auf der andern Seite mit einer Migrometerschraube, wodurch man nur noch die übrigen Sekunden suchet; so kann man, wegen der zu schnellen Abnützung der Schraubengänge unbesorgt, sich die dauerhafte Eintheilung des Verniers und zugleich die Schärfe der Migrometerschraube zu Nutze machen.

Ist z. B. das Lineal von dem Nullpunkte an bis in die Lage der Figur, in welcher weder die Theilstriche 7 und 20°, noch die Theilstriche 6 und n genau übereinkommen,

men, gedrehet worden, und man führt das das Lineal vermittelst $\frac{11}{60}$ Umdrehung der Migrometerschraube, bis die Theilstriche 6 und n übereinstimmen, zurücke; so giebt

die Migrometerschraube 0° 0′ 33″
der Vernier 6 × 21′ = 2° 6′ 0″
und der Rand des Winkelmessers 20° 20′ 0″
also beträgt der verlangte Winkel 22° 26′ 33″.

Es besteht nämlich jeder Bogen, welchen der Zeiger von dem Nullpunkte an beschreibt, aus dem Bogen, der zwischen dem Nullpunkte und den zween übereinstimmenden Theilstrichen enthalten ist, mehr aus dem Bogen, welcher sich zwischen eben jenen Theilstrichen und dem Zeiger befindet, mehr aus dem kleinen Bogen, durch welchen der Zeiger vermittelst der Migrometerschraube zurückgeführet worden ist.

Von dem auf das Lineal befestigten Fernrohre.

297. Da man bey der wirklichen Beobachtung der Winkel auf sehr entfernte Gegenstände sehen muß, so ist unumgänglich vonnöthen, daß das Lineal mit einem guten Fernrohre versehen werde. Dieses läßt sich um das Zirkelgewind o längst dem Bogen mm in einer auf die Ebene des Randes senkrechten Ebene bewegen, und um einige Grade über und unter dem Horizont auf hohe und niedrige Gegenstände richten. Der vertikale Rand mm ist von der horizontalen Gesichtslinie an auf und abwärts durch Theilstriche, die ihren Mittelpunkt in der Umdrehungsachse o haben, in Drittelgrade getheilt, und das Fernrohr mit einem auf der Seite des vertikalen Randes Fig. 524. angebrachten Vernier y, welcher die Minuten giebt verbunden.

Fig. 523. 524. 525.

Die gröbere Bewegung des Fernrohrs nach dem Rande mm geschieht, wenn man die Schraube a lößt, und das Prisma b mit freyer Hand auf oder abwärts schiebet, dann die Schraube a wieder anzieht um das Prisma in

die

dieser Lage fest zu halten: die feinere aber mittelst der vertikalen Schraube c, deren Schraubenmutter in dem Prisma b ist. Endlich wird noch das Fernrohr durch die Schraube d in jeder Lage festgehalten. Bey der gröbern Bewegung müssen also die Schrauben d und a gelößt, bey der feinern aber die Schraube d gelößt, und die Schraube a angezogen seyn, sonst würden diese Schrauben einander Gewalt anthun und verderben.

Ist das Lineal einmal vom Nullpunkt weggerückt, so geschehen die feinern Bewegungen um den Mittelpunkt durch die Schraube e, diese Schraube e geht durch einen Ansatz u, welcher mittelst einer Feder g an das Lineal gedrückt wird: dieser Ansatz u wird durch die Schraube p in jeder Lage festgehalten. Ist nun die Schraube p angezogen, und die Schraube q, die das Lineal an dem horizontalen Rand festhält gelößt, so wird das Lineal durch die Schraube e entweder gegen 90° oder gegen Null gerückt; nur muß man auch bey der Bewegung dieser Schraube nie vergessen die Schraube q zu lösen, und die Schraube p anzuziehen.

Fig. 521. 523. 524. 525. Weil die Migrometerschraube b Fig. 521. das Lineal um den Mittelpunkt bewegen muß, so werden die Schraubengänge durch die Gewalt und den öftern Gebrauch zu sehr abgenutzt, und man würde sich von dieser Schraube bey Bestimmung der Sekunden nicht die gehörige Genauigkeit versprechen können. Daher ist bey dem Quadranten Fig. 523, die Migrometerschraube S bey dem Fernrohr selbst angebracht. Es befindet sich nämlich bey diesem Fernrohr nebst den Fadenkreuz noch ein beweglicher vertikaler Faden, der mit den des Fadenkreuzes in der vertikalen Ebene der Gesichtslinie liegt. Dieser vertikale Faden läßt sich samt dem Gehäuße, durch die Migrometerschraube s rechts oder links rücken. Die Migrometerschraube s, die mit einem Zeiger (a') versehen ist, geht durch eine eingetheilte Scheibe z, welche an dem Rohre befestiget ist.

Wenn nun kein Theilstrich des Randes mit einem Theilstrich des Vernier genau übereinkömmt, so wird

durch

durch die Schraube e das Lineal so lange rechts oder links gerückt, bis ein Theilstrich des Vernier mit einem des Randes genau übereinkömmt, dann durch die Migrometerschraube s der bewegliche Faden auf den Gegenstand scharf gerichtet, und durch die Anzahl Umdrehungen der Scheibe z die Sekunden des Winkels gefunden, welche bejahend oder verneinend, zu den Graden und Minuten des Winkels addirt werden müssen, nachdem man das Lineal von 90° gegen Null oder von Null gegen 90° gerücket hat.

Das Gehäuß des Fadenkreuzes ist mit einem breiten Ringe r, der das Rohr von aussen umgiebt, verbunden, dieser Ring r läßt sich samt den Fadenkreuz und den vertikalen Faden vermög einer kleinen Oeffnung in der Seite des Rohrs, worinn die Migrometerschraube s spielet, etwas weniges um die Achse des Rohrs drehen, damit man die Fäden auf den horizontalgestellten Instrument in die vertikale Lage bringen kann.

Das Vorderglas läßt sich um die allenfalls zum Vorschein kommende Parallachse zu vermeiden längst der Achse des Rohrs bewegen.

Fernere Einrichtung des Quadranten.

298. Der Quadrant Fig. 523. welcher mit einem Fernrohre, einer Migrometerschraube und einem Vernier versehen ist, wird vermittelst einer Hilse O auf ein starkes Gestell Q Fig. 402. Tab. XIX. gesetzt; und auf demselben durch die Schraube R befestiget. Fig. 523. 524. 525.

Mit dieser Hilse ist der Quadrant durch eine starke Nuß verbunden, wodurch er mittelst der vier vertikalen Schrauben x, x, x, x in jeder Lage fest erhalten wird.

Zwo Luftblasen q, q, welche in den Seiten des Quadranten versenkt sind, also eine senkrechte Richtung gegeneinander haben, dienen dazu, daß man die Ebene des Quadranten durch die Schrauben x, x, x, x, in eine horizontale Lage bringen und darinn fest erhalten kann. Diesen Endzweck wird man um so leichter erreichen, wenn

man

man den Quadranten vorläufig auf den noch nicht angezo- genen Schrauben x, x, x, x, drehet, bis die Ebene jeder zwo übers Kreuz stehenden mit einer Seite des Qua- dranten dem Auge nach gleichläuft.

Der ganze Quadrant hat seine gröbere horizontale Bewegung auf dem Gestelle Q. Damit er nun, nach an- gezogenen Schrauben R und x, x, x, x, auch eine feinere erhalte, legt man auf die vier Schrauben x, x, x, x, die Scheibe Z, auf diese die Scheibe U, und auf die Scheibe U endlich den Quadranten. Die Scheibe U wird an den Quadranten durch vier Schräubchen 2, 2, 2, 2, befestiget. Durch die Oeffnungen Y, U, Z geht ein kögelförmiger Zapfen, durch welchen das Gewind 3, 3, die Scheibe Z fest an die Scheibe U drücket, so daß sich das ganze Instrument durch die Schraube hf auf der Scheibe Z um jenen Zapfen nur mühsam drehet. Diese Schraube hf wirket vermittelst zweener Ansätze 4 und 5 die mit der Scheibe U von gleicher Höhe sind, und wovon einer 4 auf dem Arm der Scheibe Z der andere 5 aber unten an dem Querstück des Quadranten befestiget ist. Unten an eben jenen Zapfen ist die Nuß festgeschraubet.

Das Lineal wird ebenso durch einen kegelförmigen Za- pfen um den es sich drehet, vermittelst eines Gewindes t auf dem Quadranten befestiget.

Ungeachtet die Schrauben R, x, x, x, x sehr stark angezogen sind, kann es doch geschehen, daß, indem man das Lineal von einem Gegenstande nach einem andern mit freyer Hand drehet, der Quadrant um etwas weniges verrücket wird. Um dieses zu erkennen, und im Fall es geschehen ist, den Quadranten durch die Schraube hf wieder in seine vorige Lage zurückführen zu können, bringt man unten an der Seite des Quadranten, auf welcher der Nullpunkt sich befindet, ein zweytes Fernrohr an: dieses dreht sich um das Zirkelgewind k, sein Vorderglas ist wie beym obigen Fernrohr eingerichtet; das Gehäuß des Fadenkreuzes läßt sich durch die Schraube i rechts und links rücken, und ist mit einem breiten Ringe r der das

Rohr

Rohr von aussen umgiebt, verbunden. Dieser Ring läßt sich samt dem Gehäuße des Fadenkreuzes, wie jener des obigen Fernrohrs, vermög einer Oeffnung in der Seite desselben, worinn die Schraube i spielet etwas weniges um die Achse des Rohrs drehn, damit man auch dieses Fadenkreuz auf den horizontal gestellten Instrument in die vertikale Lage bringen kann.

Von der Methode mit diesem Quadranten einen spitzen Winkel zu messen.

299. Steht das Instrument bey C auf seinem Gestelle, so drehet man 1stens den Quadranten auf den Schrauben x, x, x, x, bis die Ebene jeder zwo übers Kreuz stehenden mit einer Seite des Quadranten gleichläuft, und bringt den Zeiger vermittelst der Schraube e genau auf den Nullpunkt. 2tens rücket man das Instrument samt seinem Gestelle solange, bis der Mittelpunkt desselben über den Punkt C das obere Fernrohr nach dem Punkte P und die Ebene des Quadranten, so gut es dem Auge nach geschehen kann, in den Horizont gerichtet ist, und zieht die Schraube R an. 3tens wird das Lineal mit freyer Hand nach 45° gerücket, und der Quadrant durch die Schrauben x, x, x, x, nach den Blasen genau in den Horizont gebracht, und die Schrauben x, &c. stark angezogen. 4tens führt man das Lineal wieder zurück, und bringt den Zeiger durch die Schraube e genau auf den Nullpunkt, und drehet das ganze Instrument auf der Scheibe Z durch die Schraube h f bis das obere Fernrohr scharf nach den Gegenstand P zeiget. 5tens wird das untere Fernrohr mit freyer Hand um das Zirkelgewind K gedrehet, daß man dadurch den Gegenstand P entdecket, und das Fadenkreuz desselben durch die Schraube i so lange rechts oder links rücket, bis der vertikale Faden den Gegenstand P eben so gut, als jener des obern Fernrohrs schneidet. 6tens wird das Lineal nach gelöster Schraube p um den Mittelpunkt mit freyer Hand gedre-

Fig. 523. 524. 525.

het, bis man durch das obere Fernrohr den Gegenstand Q entdecket, sodann die Schraube p wieder anzieht, und wenn das untere Fernrohr nicht von P abgewichen, oder wieder durch die Schraube hf nach P zurück geführt ist, das obere Fernrohr durch die Schraube e scharf nach den Gegenstand Q gerichtet, endlich werden 7tens noch die Grade, Minuten und Sekunden des Bogens, den der Zeiger vom Nullpunkt an bis in die gegenwärtige Lage des Randes beschrieben hat, gefunden, und zwar die Grade und Minuten nach Nro. 296, die Sekunden aber nach Nro. 297.

Ist das Instrument nicht genau horizontal, da die Luftblasen q, q, zwischen ihren Zeichen stehen, der eine Faden des Fadenkreuzes, oder der Rand mm gegen die Ebene des Quadranten rechts oder links geneigt, die Eintheilung des Randes oder endlich der Werth einer Umdrehung der Migrometerschraube falsch bestimmt; so wird man nach vorigem Verfahren auch nie den wahren Werth des verlangten Winkels erhalten. Daher ist vonnöthen daß man vorläufig alle diese Stücke auf das genaueste berichtige.

Von der Berichtigung der Luftblase.

Fig. 526. 300. Setzet man eine Luftblase AB so auf eine Ebene XY, daß das eine End A gegen X und das andere B gegen Y steht, und erhöht oder senket diese Ebene durch die Schraube r, bis die Blase in ihre angewiesene Stelle ll kömmt, wendet sodan A gegen Y und B gegen X und die Blase bleibt an ihrer Stelle; so ist die Richtung der Grundfläche AB oder XY mit der innern Richtung ll des gläsernen Cylinders gleichlaufend und horizontal.

Tritt aber die Blase nach der Wendung auf eine Seite; so macht die Richtung der Ebene AB oder XY mit dem Horizonte einen Winkel: und wird die Blase durch die Schraube r wieder an ihre angewiesene Stelle gebracht; so beschreibt die Richtung der Ebene AB oder XY das

Dop-

Doppelte von jenem Winkel. Führt man also die Ebene AB oder XY wieder um die halbe Anzahl der Umdrehungen der Schraube r zurücke, und sodann die Blase durch die Berichtigungsschraube d abermal an ihre Stelle; so wird die innere Richtung 11 des gläsernen Cylinders, und die Richtung der Ebene AB oder XY wieder horizontal und gleichlaufend.

Versucht man dieses durch eine zwote Wendung der Luftblase, und es trift nicht ein; so verfährt man wieder wie zuvor, bis endlich die Blase nach jeder Wendung genau an ihrer angewiesenen Stelle ruht.

Richtet man nun den auf seinem Gestelle durch die Schraube R befestigten Quadranten vermittelst der Schrauben x, x, x, x so, daß die Blase einer so berichtigten Stellwage AB in jeder Richtung auf seiner Ebene an ihrer angewiesenen Stelle ruht; so steht der Quadrant horizontal: und führt man sodann auch die in den Seiten des Quadranten versenkten Blasen durch ihre Berichtigungsschrauben b', b' an ihre angewiesenen Stellen; so läßt sich der Quadrant inskünftige nach diesen viel bequemer horizontal richten. Fig. 523. 524.

Bringt man die Ebene XY auf dem obern Fernrohre des Quadranten so an, daß sich die Luftblase AB nach jeder Wendung durch zwo vollkommen gleiche Schrauben darauf befestigen läßt; so kann man durch die Schraube c wie zuvor durch die Schraube r die Richtung ihrer Grundfläche AB mit der innern Richtung 11 des gläsernen Cylinders um so geschwinder gleichlaufend einrichten, als es leichter wird den von der Ebene AB beschriebenen Winkel durch die Eintheilung des Randes mm, als durch die Umdrehungen der Schraube r zu halbiren. Uebrigens erspart man bey dieser Einrichtung das Unbequeme die zur Berichtigung der Luftblase AB gehörige Maschine XY mitzuführen. Fig. 524. 526.

Setzet man die Luftblase AB, nach dem das Instrument eben dadurch einmal horizontal gestellet ist, wieder auf das Fernrohr, richtet den Zeiger des Fernrohrs auf

einen beliebigen Theilstrich des Randes m m, und bringt die Blase durch ihre Berichtigungsschraube n wieder an ihre gehörige Stelle; so kann sie anstatt der beeden in den Seiten des Quadranten versenkten dienen. Denn so oft man den Zeiger des Fernrohres wieder auf demselben Theilstriche des Randes m m befestiget, das Lineal bald über den Nullpunkt, bald über den Theilstrich von 90° drehet, und das Instrument durch die Schrauben x, x, x, x, solange nach dieser Blase richtet, bis sie in beeden Lagen des Lineals an ihrer gehörigen Stelle ruht; so steht das Lineal allemal horizontal.

Weil die zuvielfältige Bewegung des Lineals um den Mittelpunkt der Schärfe des Instruments nachtheilig werden kann; so ist es rathsam, daß man sich dieser Luftblase bloß zur Berichtigung der in den Seiten des Quadranten versenkten bediene.

Von der Methode den Kreuzfaden in die vertikale Ebene des Gegenstandes zu bringen.

Fig. 523. 301. Ist das Instrument horizontal gestellt, und man richtet das Fernrohr nach der Schnur eines in der Ferne aufgehängten Perpendikels, und drehet den Ring r, woran das Gehäuse des Fadenkreuzes befestiget ist, bis der Faden jene Schnur von oben bis unten decket; so liegt der Faden bey horizontalgestelltem Instrumente allzeit mit dem Gegenstande, worauf das Fernrohr gerichtet ist, in einer und derselben vertikalen Ebene.

Fig. 534. Eben dieses erhält man auch, wenn man über eine Anhöhe durch senkrecht aufgerichtete Stangen eine gerade Linie C E A B aussteckt, und, nachdem das Instrument horizontal über C gestellet ist, das Fadenkreuz solange drehet, bis der Faden die Linie A B von oben bis unten decket.

Von der Berichtigung der Eintheilung des Randes.

302. Ist ACO ein rechter Winkel, das Instrument über A nach der Stange C gestellt, und das obere Fernrohr an dem Rande mm in beliebiger Erhöhung befestiget, und man drehet sodann den Zeiger des Lineals genau auf jeden Theilstrich, sucht vermittelst einer vertikal aufgehaltenen Stange in der Senkrechten CO den Durchschnitt R der Gesichtslinie AR, und mißt die Gerade AC und CR; so läßt sich der Winkel RAC berechnen, wenn man wegen des rechtwinklichten Dreyeckes ACR sagt: es verhält sich Fig. 527.

AC : Halbm. = CR : Tang. A.

Nach dieser Methode kann man den wahren Werth des Bogens, welcher zwischen dem Nullpunkte und einem jeden Theilstriche enthalten ist, finden; wenn man nur vorher mit unberichtigtem Instrumente genau einen rechten Winkel ACO auszustecken im Stande ist.

Zu diesem Ende befestiget man 1tens den Zeiger des Lineals auf dem Theilstriche des 90ten Grades, beyde Fernrohre aber beynahe in einer mit der Ebene des Quadranten gleichlaufenden Lage, stellet sodann das Instrument horizontal über einem Punkte C der Geraden AB, richtet das untere Fernrohr durch die Schraube hf scharf nach B, und stecket in der Gesichtslinie des ober einen Stange D auf. Nach diesem drehet man ohne ein Fernrohr, noch den Zeiger zu verrücken, das ganze Instrument auf seinem Gestelle, bis das obere Fernrohr gegen A zeiget, stellet das Instrument wieder horizontal über C, und richtet dieses Fernrohr durch die Schraube hf scharf nach A. Zeiget nun das untere Fehrnrohr genau auf die Stange D; so ist ACD ein rechter Winkel: oder weicht dessen Gesichtslinie CE von CD ab; so ist DCE das doppelte Komplement des Winkels ACD: richtet man also in der Gesichtslinie CE eine Stange E Fig. 528. 529.

auf,

auf, nimmt CE = CD und halbirt DE durch eine Stange in O; so wird ACO ein rechter Winkel.

Fig. 527. Ist z. B. ACO ein nach dieser Methode ausgesteckter rechter Winkel, AC = 500 Klafter, oder = 18000 Sechstel Schuh, und 1tens für den Zeiger auf dem Theilstriche von 3 Graden CR = 26 Klafter 1 Schuh 2 Zoll oder = 943 Sechstel Schuh; so wird nach obiger Proportion

die Summe = 12.9745117
Log. AC = 4.2552725

also Log. Tang. A = 8.7192392
und A = 2° 59′ 56″.

Ist 2tens für den Zeiger auf dem Theilstriche von 3° 20′ CR = 29 Klafter 10 Zoll, oder = 1049 Sechstel Schuh; so wird

die Summe = 13.0207755
Log. AC = 4.2552725

also Log. Tang. A = 8.7655030
und A = 3° 20′ 7″

Ist 3tens für den Zeiger auf dem Theilstriche von 3° 40′ CR = 1160 Sechstel Schuh, so wird

die Summe = 13.0644580
Log. AC = 4.2552725

also Log. Tang. A = 8.8091855
und A = 3° 41′ 14″.

Ist 4tens für den Zeiger auf dem Theilstriche von 4° CR = 1268 Sechstel Schuh; so wird

die Summe = 13.1031193
Log. AC = 4.2552725

also Log. Tang. A = 8.8478468
und A = 4° 1′ 46″.

Fährt man so fort durch alle Theilstriche von 1° bis auf 30° 40′; so kann man die wahren Werthe der Theilstriche von 31° bis 60° 40′ ebenso wie zuvor finden, wenn man den Zeiger auf dem Theilstriche des 30ten Gra-

des

des befestiget, das obere Fernrohr durch die Schraube h f scharf nach C richtet, in der Gesichtslinie des untern eine Stange D setzet, und zu dem gefundenen wahren Werthe eines jeden Theilstriches noch den wahren Werth des 30ten Grades addirt.

Ebenso findet man die wahren Werthe für die Theilstriche von 61° bis 90°, wenn man den Zeiger über den Theilstrich des 60ten Grades befestiget, das obere Fernrohr durch die Schraube h f nach C richtet, in der Gesichtslinie des untern eine Stange E setzet und zu dem gefundenen Werthe eines jeden Theilstriches noch den wahren Werthe des 60ten Grades addirt.

Weil das Interpoliren bey den sehr kleinen Winkeln nicht die gehörige Schärfe giebt; so kann man z. B. die Stange des 4ten Grades in der Erde befestigen, den Zeiger auf den Nullpunkt setzen, und beyde Fernrohre nach dieser Stange richten, sodann den Zeiger nacheinander auf die Theilungsstriche von 20′ und 40′ setzen und von dem durch die Tangente CR jedesmal gefundenen Winkel den wahren Werth des 4ten Grades abziehen.

Ist z. B. in dieser Stellung des Instruments für den Zeiger auf dem Theilstriche von 20′ CR = 1378 Sechstel Schuh; so wird

$$\begin{array}{rl} \text{die Summe} = & 13.1392492 \\ \text{Log. AC} = & 4.2552725 \\ \hline \text{also Log. Tang. A} = & 8.8839767 \\ \text{und A} = & 4^\circ\, 22'\, 40''; \end{array}$$

folglich bleibt nach Abzug 4° 1′ 46″ noch 20′ 54″ für den wahren Werth des ersten Theilstriches.

Die Theilstriche des Randes, welche wegen des Verniers von dem Nullpunkte an auf die entgegengesetzte Seite bis auf 7° fortgesetzet sind, können, wenn man die Senkrechte CO auf die entgegengesetzte Seite verlängert, wie die vorigen berichtiget werden.

Oder will man lieber das Instrument z. B. nach der Stange des 12ten Grades stellen, und von dort an diese

Theil-

Theilstriche rückwärts vornehmen; so erhält man ihre wahren Werthe, wenn man den jedesmal gefundenen Winkel von dem wahren Werthe des 12ten Grades abzieht.

Nachdem die wahren Werthe für alle Theilstriche des Randes nach dieser Methode gefunden worden sind, verfertigt man daraus eine Tabelle von zwo Reihen: in die erste Reihe schreibt man die Theilstriche nach den Graden und Minuten, welche sie geben sollen, und in die zwote die Grade, Minuten und Sekunden, welche sie wirklich geben, wie folgt.

Berichtigungstabelle des Randes.

Theilstriche.	Wahre Werth derselben.
0° 20′	0° 20′ 54″
0° 40′	0° 39′ 55″
1° 0′	0° 59′ 4″
1° 20′	1° 21′ 8″
1° 40′	1° 40′ 17″
2° 0′	2° 0′ 31″
2° 20′	2° 19′ 40″
2° 40′	2° 40′ 3″
3° 0′	2° 59′ 56″
3° 20′	3° 20′ 7″
3° 40′	3° 41′ 14″
4° 0′	4° 1′ 46″
&c.	&c.

Von der Berichtigung der Eintheilung des Verniers.

Fig. 527.

303. Man stellet das Instrument über A nach der Stange C, richtet den Zeiger genau auf einen beliebigen Theilstrich z. B. auf jenen von 4°, und sucht den wahren Werth von diesem Winkel durch die Tangente CR, rück-

ket

cket sodann alle Theilstriche des Verniers nacheinander auf ebenjenen Theilstrich des 4ten Grades, und zieht von dem durch die Tangente C R jedesmal gefundenen Winkel den für den Theilstrich des 4ten Grades gefundenen ab.

Ist z. B. der wahre Werth für den Theilstrich des 4ten Grades 4° 1' 46'', und man findet, da der 1te Theilstrich des Verniers mit dem Theilstriche des 4ttn Grades übereinkömmt, durch die Tangente C R den Winkel = 4° 22' 55''; so beträgt der erste Theilstrich des Verniers 21' 9''.

Ist man mit der Berichtigung aller Theilstriche des Verniers fertig; so bringt man sie in eine Tabelle wie folgt:

Berichtigungstabelle des Verniers.

Theilstriche.	Wahre Werth derselben.		
1te	0°	21'	9''
2te	0°	42'	10''
3te	1°	3'	18''
4te	1°	25'	13''
5te	1°	44'	56''
6te	2°	5'	49''
7te	2°	26'	59''
&c.	&c.		

Von der Berichtigung der Migrometerschraube.

304. Stellet man wieder das Instrument über A nach der Stange C, richtet den Zeiger genau auf einem Theilstrich z. B. auf jenem des 4ten Grades, und sucht den Winkel durch die Tangente C R, rücket sodann den beweglichen vertikalen Faden durch die Migrometerschraube s um eine gewisse Anzahl Umdrehungen der Scheibe z z. B. Fig. 527. 523.

um

um 10 zurück, sucht wieder den Winkel durch die Tangente CR, und zieht diesen von dem zuvor gefundenen ab, so erhält man den Winkel, welcher 10 Umdrehungen der Scheibe z entspricht. Dieser Winkel durch 10 dividirt, giebt den Werth von einer Umdrehung, und dieser Werth durch die Anzahl 48 der Theile der Scheibe z dividirt giebt jenen, von jedem Theil einer Umdrehung.

Will man schärfer verfahren, so sucht man nacheinander die Werthe von einer, von zwo, von drey, von vier Umdrehungen u. s. f., wie zuvor jenen von 10 Umdrehungen.

Nach diesem findet man den Werth von jeder Umdrehung z. B. jenen von der 10ten, wenn man den Werth der 9 ersten Umdrehungen von dem Werth der 10 ersten abzieht. Endlich giebt der Werth einer jeden Umdrehung, durch 48 dividirt jenen von jedem Theile der Scheibe z für ebendiese Umdrehung.

Hieraus verfertigt man wie folgt eine

Berichtigungstabelle der Migrometerschraube.

Anzahl der Umdrehungen	Werte aller	Werthe einer jeden
1.	4′ 0″	4′ 0″
2.	8′ 10″	4′ 10″
3.	12′ 5″	3′ 55″
4.	16′ 10″	4′ 5″
5.	20′ 0″	3′ 50″
&c.	&c.	&c.

Soll man nun nach dieser Tabelle den Werth von mehr Umdrehungen und Theilen der folgenden Umdrehung bestimmen: so multiplicirt man den Werth dieser Umdrehung durch die Anzahl der Theile, dividirt das Produkt

durch

durch 48, und addirt den Quotienten zu dem Werthe jener Umdrehungen.

Diesemnach wird der Werth von $3\frac{25}{48}$ Umdrehungen $= 12' \; 5'' + 4' \; 5'' \times \frac{25}{48} = 12' \; 5'' + 2' \; 8'' = 14' \; 13''$ und der Werth von $2\frac{17}{48} = 8' \; 10'' + 3' \cdot 55'' \times \frac{17}{48} = 8' \cdot 10'' + 1' \; 23'' = 9' \cdot 33''$.

Nach der Beobachtung eines jeden Winkels muß man die Migrometerschraube wieder um ebensoviel Umdrehungen, als man dazu gebraucht hat, zurücke führen, damit der bewegliche vertikale Faden, jenen des Fadenkreuzes wieder decket.

305. Damit man sich die Arbeit bey diesen Berichtigungen erleichtere, mißt man die Senkrechte CO gleich anfänglich so groß, als die Tangente von 30° 40′ für den Halbmesser AC ausfällt, und schlägt zu jeden 4, 3, oder 2 Klaster einen Pflock in die Erde, worauf man das Zeichen genau anmerket, und die Anzahl der Klaster aufschreibet, so daß man bey jeder Tangente CR immer nur von dem nächsten Pflocke an, messen darf. Fig. 527.

Von der Methode die Eintheilung des Randes, und jene des Verniers durch die Migrometerschraube zu berichtigen.

306. Berichtiget man zuerst die Migrometerschraube; so läßt sich eben dadurch die Berichtigung sowohl der Eintheilung des Randes als jener des Verniers bewerkstelligen, wenn man vorläufig für den Halbmesser AC die Tangenten CR aller Winkel, welche die Eintheilung geben soll, bis auf 30° 40′ berechnet und in der Senkrechten CO durch Pflöcke aussteckt. Denn stellet man sodann das Instrument über A nach C, richtet den Zeiger des Lineals auf dem Theilstrich, und schraubet den beweglichen vertikalen Faden durch die Migrometerschraube, bis er die Stange, welche man zu Ende der Tangente eines jeden Winkels aufhält, schneidet; so findet man durch die Fig. 527.

Anzahl

Anzahl Umdrehungen der Scheibe z um wieviel die Eintheilung den Winkel größer oder kleiner giebt, nachdem man den Faden rechts oder links geschraubet hat.

Nimmt man den Halbmesser A C von 100000 Halbzoll oder 694 Klafter 2 Schuh 8 Zoll; so geben die natürlichen Zahlen, so wie sie in der Reihe der Tangenten der Funktionentafel zu diesem Halbmesser gehören, ohne weitere Rechnung die in der Senkrechten C O auszusteckenden Tangenten C R auch in Halbzollen.

So wird z. B.

Tang. 1° = 1746 Halbzoll = 12° 0′ 9″
Tang. 1° 20′ = 2328 Halbzoll = 16° 1′ 0″
Tang. 1° 40′ = 2910 Halbzoll = 20° 1′ 3″
Tang. 2° = 3492 Halbzoll = 24° 1′ 6″
&c.

Von der Berichtigung der Lage des vertikalen Randes.

Fig. 530. 307. Ist die Ebene m m c des Randes m m nach welchem sich das obere Fernrohr auf hohe und niedrige Gegenstände beweget, auf die Ebene des horizontalen Randes A B senkrecht; so beschreibt der Zeiger, indem man das Lineal von p nach q drehet, einen eben so grosen Bogen, als die Ebene m m c beschreibt; folglich erhält man in diesem Falle durch das Verfahren Nro. 299. allzeit den wahren horizontalen Winkel p c q, obgleich das Fernrohr bald höher bald niedriger steht.

Fig. 531. Steht die Ebene m m c schief auf die Ebene des Randes A B, und das Fernrohr bleibt in der Höhe m x an dem Bogen m m fest geschraubet; so durchläuft der Zeiger wieder einen eben so großen Bogen als die durch x gezogene vertikale Ebene s r c, die nach p und nach q gerichtet wird; folglich erhält man auch in diesem Falle durch das Verfahren Nro. 299. den wahren horizontalen Winkel.

Fig. 532. 533. Steht aber das Fernrohr nach p in der Höhe m x und nach q in der Höhe m y; so beschreibt zwar der Zeiger

ger abermal einen eben so großen Bogen als die durch x geführte vertikale Ebene r s c: allein da der Gegenstand q in der durch y gezogenen vertikalen Ebene z u c liegt; so wird der Winkel p c q um den Bogen s z Fig. 532. zu klein und Fig. 533. zu groß beobachtet. Es kömmt also hier nur darauf an, daß man für jede zwo verschiedenen Höhen m x und m y den Bogen s z bestimme.

Stecket man über eine Anhöhe A B durch senkrecht in die Erde befestigte Stangen eine gerade Linie aus, und bestimmt auf einer über das Thal A E gegenüber liegenden niedrigen Anhöhe E C in der Verlängerung der Geraden A B einen Punkt C; so erhält man eine vertikale Ebene C E A B. Fig. 534.

Die Stangen müßen so nahe beysammen stehen, daß jede niedrigere den Fuß der nächsthöhern dem Auge in C verdecket.

Ist nun das Instrument horizontal über C gestellt, das Fernrohr in seiner kleinsten Erhöhung m x nach der Stange A gerichtet, und man sezet sodann ohne das Instrument, noch das Lineal zu verrücken das Fernrohr in seine größte Erhöhung m y; so ist der Bogen m m vertikal, wenn das Fernrohr noch eben so gut nach der Stange B, als vorher nach der Stange A zeiget. Weicht aber das Fernrohr Fig. 532. auf die Seite des 90ten Grades oder Fig. 533. auf die Seite des Nullpunkts von der Stange B ab, so erfährt man wieviel Minuten und Sekunden diese Abweichung s z für den größten Unterscheid x y der Erhöhungen des Fernrohs beträgt, wenn man den beweglichen vertikalen Faden vermittelst der Migrometerschraube auf die Stange B richtet, und die Anzahl Umdrehungen der Scheibe z in Minuten und Sekunden verwandelt.

Ist die Abweichung s z für den Bogen x y einmal bekannt; so erhält man auch die Abweichung für jenen Theil des Bogens x y, wenn man jene durch die Anzahl der Theile dividirt.

Ist z. B. der Bogen m m von der horizontalen Gesichtslinie an in Drittelgrade getheilt, die größte Senkung

unter

unter dem Horizont der Gesichtslinie 5° 0′ und die größte Erhöhung über dem Horizont der Gesichtslinie 11° 0′,, so ist $xy = 16° - 0'$; ist nun sz 4′, so beträgt die Abweichung für jede 20 Minuten Erhöhung $= \frac{240}{48} = 5''$.

Nach dieser Bestimmung verfertiget man folgende

Berichtigungstabelle der Abweichung des Randes mm von der vertikalen Ebene gegen 90°.

Erhöhung des Fernrohrs	Abweichung gegen 90°
5° 0′	0′ 0″
4° 40′	0′ 5″
4° 20′	0′ 10″
3° 0′	0′ 15″
— —	— —
— —	— —
0° 0′	1′ 15″
0° 20′	1′ 20″
0° 40′	1′ 25″
1° 0′	1′ 30″
&c.	&c.

Will man schärfer verfahren, so kann man das Fernrohr von Drittel zu Drittelgrade erhöhen oder senken, die Abweichung für jeden Unterscheid der Erhöhungen des Fernrohres ebenso wie jene für den Unterscheid xy durch Beobachtung bestimmen, und aus den beobachteten Abweichungen eine Tabelle wie die vorige verfertigen. Eine Eintheilung des Randes mm in kleinere Theile als in Drittelgrade wäre zu dieser Absicht überflüßig, weil man we-

wegen des Fernrohres großen Feldes allemal unter einer aus diesen seinen berichtigten Erhöhungen gewiß jeden Gegenstand erblicket.

Soll man nun mit einem Instrumente, dessen vertikaler Rand gegen 90° abweicht, den Winkel p c q beobachten; so zieht man die Abweichung des nach dem ersten Gegenstand p gerichteten Fernrohrs von der Abweichung des nach q gerichteten ab, und addirt den Unterscheid zu dem nach obiger Methode bestimmten Winkel. Dieser Unterscheid wird bejahend oder verneinend, nachdem die Abweichung bey p kleiner oder größer als bey q ist. Fig. 532.

Ist z. B. die Erhöhung des Fernrohrs bey p = 0° 40′ unter der horizontalen Gesichtslinie, und bey q = 1° 0′ über derselben, so wird der zu den beobachteten Winkel zu addirende Unterscheid nach obiger Tabelle 90″ — 65″ = 25″. Ist aber jene Erhöhung bey p = 2° 40′ über der horizontalen Gesichtslinie, und bey q = 3° 0′ unter derselben, so wird jener zu addirende Unterscheid 30″ — 115″ = — 85″ = — 1′ 25″.

Weicht der Rand m m von der vertikalen Ebene gegen 0° ab; so muß man die Abweichung bey q von der Abweichung bey p abziehen, und wieder den Unterscheid, so wie er ist bejahend oder verneinend, zu dem beobachteten Winkel addiren. Fig. 433.

Ist z. B. in dieser Voraussetzung die Tabelle die obige, und die Erhöhung des Fernrohrs bey p über der horizontalen Gesichtslinie = 4° 40′ und bey q = 7° 20′ ebenfalls über derselben, so wird jener zu addirende Unterscheid 145″ — 185″ = —40″, und ist die Erhöhung bey p unter der horizontalen Gesichtslinie = 1° 40′ und bey q = 4° 20′ unter derselben, so wird jener zu addirende Unterscheid = 50″ — 10″ = + 40″.

Von

Von der wirklichen Beobachtung der Winkel mit einem berichtigten Quadranten.

Fig. 535. 308. Um die Winkel auf jedem Punkte A zu beobachten stellet man den Quadranten 1tens nach einem beliebigen Gegenstand B und mißt die spitzen Winkel B A C, B A D, B A E, 2tens nach dem Gegenstand E und mißt die spitzen Winkel E A F, E A G, 3tens nach dem Gegenstand G und mißt die spitzen Winkel G A H, G A K, G A L &c. und verfertiget dabey eine Tabelle von vier Reihen: in der ersten werden die Namen der beobachteten Punkte geschrieben; in die zwote setzet man nach dem Punkte, worauf das Instrument gerichtet ist, nur die Erhöhung des Fernrohres, nach jedem andern Punkte aber untereinander 1tens die Erhöhung des Fernrohres, 2tens die Anzahl der Umdrehungen der Migrometerschraube, 3tens die Anzahl der Theile des Verniers, und 4tens die Anzahl Grade und Minuten des Randes; in die dritte Reihe kommen die wahren Werthe ebendieser Stücke, wie sie nach den Berichtigungstabellen ausfallen, und in der vierten werden die wahren Winkel zwischen jedem Punkte und dem Gegenstande, worauf das Instrument gerichtet ist, wie folgt, angemerkt.

Beobachtungstabelle der Winkel in A.

I.	II.	III.	IV.
Nam. der Punk.	Beobachtungen.	Ihre Werthe.	Winkel.
B.	Erh. über: 3° 40'	130''	
C	Erh. über: 4° 20' Umd. $\frac{11}{48}$ Vern. 11 Rand. 13° 20'	+ 10'' 1' 0'' 3° 50' 37'' 13° 21' 41''	17° 13' 28''

D	Erh.über: 5° 40′	+ 30″	
	Umd. $\frac{7}{48}$	35″	
	Bern. 13	4° 33′ 11″	39° 56′ 19″
	Rand. 35° 20′	35° 22′ 3″	
E.	Erh. über: 2° 20′	— 20″	
	Umd. $\frac{21}{48}$	1′ 45″	
	Bern. 3	1° 3′ 18″	79° 44′ 14″
	Rand. 78° 40′	78° 39′ 31″	
E.	Erh.über: 2° 20′	110″	
F.	Erh.über: 6° 20′	+ 1′ 0″	
	Umd. $\frac{10}{48}$	50″	
	Bern. 19	6° 38′ 37″	21° 40′ 18″
	Rand. 15° 0′	14° 59′ 51″	
G.	Erh. über: 5° 40′	+ 50″	
	Umd. $\frac{7}{48}$	35″	
	Bern. 2	42′ 10″	61° 23′ 23″
	Rand. 60° 40′	60° 39′ 48″	
G.	Erh. unt 4° 40′	5″	
H.	Erh. unt. 3° 20′	+ 20″	
	Umd. $\frac{13}{48}$	1′ 5″	
	Bern. 11	3° 50′ 37″	33° 30′ 17″
	Rand. 29° 40′	29° 38′ 15″	
K.	Erh.über: 2° 0′	+ 1′ 40″	
	Umd. $\frac{6}{48}$	30″	
	Bern. 1	21′ 9″	41° 4′ 22″
	Rand. 40° 40′	40° 41′ 3″	
L.	Erh.über: 1° 20′	+ 1′ 30″	
	Umd. $\frac{4}{48}$	20″	
	Bern. 3	1° 3′ 18″	71° 6′ 12″
	Rand. 70° 0′	70° 1′ 4″	
&c.	&c.	&c.	&c.

In dieser Tabelle ist vorausgesetzet worden, daß der Rand mm gegen 90° abweicht, und daher die Abweichung bey

dem Punkte, nach welchem das Instrument gerichtet ist, von der Abweichung bey jedem folgenden Punkte abgezogen, und in der dritten Reihe nur der bejahende oder verneinende Unterscheid ausgedrücket worden.

Wiche der Bogen gegen 0° ab, und die Beobachtungen wären dieselben; so würden in der dritten Reihe ebenjene Unterscheide mit entgegengesetzter Bezeichnung vorkommen.

Von der Vergleichung des berechneten und des auf der Oberfläche der Erde angenommenen Netzes in Ansehung ihrer Horizonte.

309. Stellet man sich vor, es sey durch jede zween auf der Oberfläche der Erde angenommenen Punkte, und den Mittelpunkt O der Erde eine Ebene COA, AOB, BOC, COD, DOB, BOE &c. geführt; so ist jeder nach Nro. 299. und 308. gemessene Winkel BAC nichts anders als der Winkel, den die zwo Ebenen AOB und AOC in ihrem Durchschnitte AO machen.

Fig. 537. 538.

Man erhält also in jeder Entfernung OA oder Oa vom Mittelpunkte der Erde immer denselben Winkel. Oder es ist für das Netz gleichgültig, ob man die horizontalen Winkel bald auf hohem Gebürge, bald auf niedrigem Erdreiche, oder alle in einem und demselben wahren Horizonte messe.

Sind ferner alle Halbmesser der Erde OA, OB, OC, OD &c. gleich; so wird das durch die Standlinie AB, und die Winkel A, B, C, D &c. berechnete Netz mit dem auf der Oberfläche der Erde angenommenen Netze vollkommen übereinkommen, so daß die gleichnamigen Scheitel aller Dreyecke beyder Netze genau zusammenfallen.

In diesem Verstande sagt man, daß alle Dreyecke sowohl des berechneten, als des auf der Oberfläche der Erde angenommenen Netzes in dem Horizonte der Standlinie AB liegen.

Be-

Befinden sich nun die Punkte C, D, E, F &c. auf hohem Gebirge oder niedrigem Erdreiche weit über oder unter dem Horizonte der Standlinie A B in c, d, e, f &c.; so bleiben alle Winkel, und die Standlinie, wodurch das ganze Netz bestimmet wird, unverändert; folglich bleibt auch das berechnete Netz dasselbe.

Es liegen also alle Dreyecke des berechneten Netzes allemal in dem Horizonte der Standlinie, und alle Punkte desselben kommen nur in so ferne mit den gleichnamigen auf der Oberfläche der Erde angenommenen Punkten überein, als man sich diese auch in dem Horizonte der Standlinie vorstellet.

Sind die Endepunkte einer geraden Linie A B gleichhoch; so bestimmen diese ihren Horizont: ist aber B höher als A; so halbirt ihr Horizont x y die Höhe B U. Fig. 539. 540.

Hieraus folgt, daß jede Linie e f, nachdem ihr Horizont höher oder niedriger als der Horizont der Standlinie liegt, durch das wirkliche ausmessen großer oder kleiner als durch die Rechnung ausfallen muß, und daß nur jene Linien, deren Horizonte mit jenem der Standlinie einerley sind, mit der Rechnung übereinkommen können. Fig. 537. 538.

Nimmt man die Standlinie A B größer oder kleiner, als sie wirklich ist, = a b an; so bleibt das Netz wegen der nämlichen Winkel dem vorigen ähnlich: alle Seiten aber werden in dem Verhältnisse der Standlinien A B : a b großer oder kleiner. Dieses hat sonst keine andere Folge, als daß der Horizont des berechneten Netzes um die Höhe A a im ersten Falle über den Horizont der Standlinie A B in die Luft erhoben oder im zweyten Falle unter ebendiesen in die Erde versenket wird, und daß folglich nicht mehr die Linien, welche in dem Horizonte der wahren Standlinie A B liegen, sondern anstatt dieser jene, welche sich in dem Horizonte der angenommenen Standlinie a b befinden, mit der Rechnung übereinkommen.

Weil das Netz seinem Endzwecke desto näher kömmt, jemehr Linien auf der Oberfläche der Erde mit der Rechnung übereinstimmen, und je weniger die übrigen von eben der-

derselben abweichen; so soll man die Standlinie, soviel es möglich ist, in einer mittlern Höhe aller aufzunehmenden Punkte wählen, oder die auf hohem Gebirge gemessene um etwas kleiner und die auf niedrigem Erdreiche gemessene um etwas größer, als sie durch wirkliches Ausmessen gefunden worden ist, annehmen.

Fig. 537. 538. 310. Ist O A der Halbmesser der Erde für die Standlinie A B, und man zieht A n gleichlaufend mit B b; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke O A B und A n a

$$OA : AB = Aa : an;$$

folglich wird $an = \frac{AB \times Aa}{OA}$.

Nachdem man also eine Standlinie A B genau gemessen hat, so findet man ihre Größe a b für einen um A a höhern oder niedrigern Horizont, wenn man das Produkt der Standlinie A B in die Erhöhung oder Vertiefung A a des Horizonts durch den Halbmesser O A der Erde dividirt, und den Quotienten a n im ersten Falle zu A B addirt oder im zweyten Falle von A B abzieht.

Ist z. B. $OA = 3273822^{\circ}$
$AB = 10000^{\circ}$
und $Aa = 1000$;
so wird $an = \frac{10000000}{3273822} = 3^{\circ}.05$
also Fig. 537. $ab = 10003.05$
und Fig. 538. $ab = 9996.95$

Ist $AB = 6000$ und $Aa = 300$;
so wird $an = \frac{1800000}{3273822} = 0.55$
also Fig. 537. $ab = 6000.55$
und Fig. 538. $ab = 5999.45$

Ist $AB = 3000$ und $Aa = 300$;
so wird $an = \frac{900000}{3273822} = 0.27$

Ist

Ist endlich AB = 6000 und Aa = 100;

so wird $an = \frac{600000}{3273822} = 0.18$

311. Weil der Halbmesser der Erde um etliche hundert oder auch tausend Klafter größer oder kleiner genommen den Quotienten an um nichts merkliches ändert; so kann man für jede Standlinie AB allzeit den Halbmesser OA = 3273822 annehmen. Fig. 537. 541.

Da für jede andere Standlinie AE und Erhöhung am, der Unterscheid $mr = \frac{AE \times Am}{OA}$ wird; so verhält sich 1tens für jede zwo Standlinien AB, AE und ihre Erhöhungen Aa, Am

$$AB \times Aa : AE \times Am = an : mr.$$

2tens für gleiche Erhöhungen Aa und Am,

$$AB : AE = an : mr,$$

und 3tens für gleiche Standlinien AB und AE

$$Aa : Am = an : mr.$$

Ist also an für eine beliebige Standlinie AB und ihre Erhöhung Aa nach obiger Methode einmal berechnet; so findet man mr für jede andere Standlinie AE und ihre Erhöhung Am, durch die erste Proportion, wenn sowohl die Standlinien als ihre Erhöhungen abändern, durch die zwote Proportion, wenn die Erhöhungen gleich sind, und durch die dritte, wenn die Standlinien dieselben bleiben.

Ist z. B. für die Standlinie AB = 10000° und ihre Erhöhung Aa = 1000° an = 3°.05 einmal bekannt; so verhält sich für die Standlinie AE = 6000 und ihre Erhöhung Am = 300

$$10000000 : 1800000 = 3°.05 : mr,$$

also wird $mr = \frac{3.05 \times 18}{100} = 0.55$

Ist ferner für die Standlinie AB = 6000 und ihre Erhöhung Aa = 300 an = 0°.55 bekannt; so ver-

verhält sich für die Standlinie AE = 3000 und ihre Erhöhung Am = Aa,

$$6000 : 3000 = 0^{\circ}.55 : mr,$$

also wird $mr = \frac{0^{\circ}.55}{2} = 0^{\circ}.27$

Oder ist endlich für dieselbe Standlinie AB = AE = 6000° ihre Erhöhung Am = 100°; so verhält sich

$$300 : 100 = 0^{\circ}.55 : mr,$$

also wird $mr = \frac{0^{\circ}.55}{3} = 0^{\circ}.18$

In jedem Falle wie oben.

Es verhalten sich nämlich jene Unterschiede an und mr der Standlinien 1tens wie die Produkte der Standlinien in ihre Erhöhungen, wenn sowohl diese als jene abändern, 2tens wie die Standlinien bey gleichen Erhöhungen, und 3tens wie die Erhöhungen bey denselben Standlinien.

Nach diesen Methoden läßt sich also jedesmal bestimmen, um wieviel man eine genau gemessene Standlinie größer oder kleiner annehmen muß, damit sich der Horizont des Netzes um eine gegebene Größe erhöhe oder senke.

Von dem trigonometrischen Nivelliren.

Fig. 455. 456. 312. Stellet man den Quadranten horizontal, und erhöht oder senket das obere Fernrohr bis die auf demselben befestigte Luftblase an ihrer angewiesenen Stelle ruht; so wird die Gesichtslinie, so oft man das Instrument ebenso stellet, mit der Vertikallinie denselben Winkel machen, und der Zeiger des Fernrohres auf dem vertikalen Rande denselben Bogen abschneiden.

Richtet man so den Quadranten über b nach der Stange ax und mißt die Höhen be und af, sodann über a nach der Stange by und mißt die Höhen ag und bh; so findet man nach Nro. 168. den mit g gleich hohen Punkt o, und dann nach Nro. 169. Fig. 348. den Durchschnitt n der horizontalen Gesichtslinie. Erhöht oder senket

ket man also das Fernrohr bis die Gesichtslinie nach diesem Punkte n zeiget, richtet die Blase vermittelst ihrer Berichtigungsschraube wieder an ihre Stelle, und beobachtet den Bogen, welcher auf dem vertikalen Rande zwischen dem Zeiger des Fernrohres und dem horizontalen Rande begriffen ist; so kann dieses Instrument auch zum ausmessen vertikaler Winkel dienen. Denn ist der vertikale Rand m m von der horizontalen Gesichtslinie an, auf und abwärts in Drittelgrade getheilt, so giebt jeder Winkel von Null bis zur schiefen Gesichtslinie abwärts gezählt, einen hohen Winkel; und von Null bis zur schiefen Gesichtslinie aufwärts gezählt, einen tiefen Winkel:

313. Ist AC der wahre und A d der scheinbare Horizont des Punktes A, und man will den vertikalen Winkel c A d beobachten; so erhält man, weil der Punkt c um den Betrag c n der Strahlenbrechung höher, als er ist, gesehen wird, den Winkel n A d. c n aber ist für jeden Punkt c in derselben Vertikallinie O C allemal $= \frac{1}{7}$ C d. **J. H. Lamberts Bahn des Lichts durch die Luft.** Also wird die wahre Höhe C c eines jeden Punktes c über der Gesichtslinie A (Fig. 542. 543.)

Fig. 542. $= dn + \frac{6}{7} Cd$
und Fig. 543. $= - dn + \frac{6}{7} Cd$.

Sagt man also wegen des rechtwinklichten Dreyeckes n A d: es verhält sich

Halbm. : A d = Tang. A : d n,

und addirt zu der Fig. 542. bejahenden oder Fig. 543. verneinenden scheinbaren Höhe d n noch $\frac{6}{7}$ C d, die Erhöhung des im scheinbaren Horizonte gesehenen Punktes über dem wahren Horizonte für die Entfernung A d; so erhält man die wahre bejahende oder verneinende Höhe C c des Punktes c über dem Punkte A.

Ist

Ist z. B. A d = 6745 Klafter, und man findet durch die Beobachtung den Winkel n A d = 1° 13′; so ist 1tens

$$\text{Log. Tang. } A = 8.3271143$$
$$\text{Log. } Ad = 3.8289820$$
$$\text{also Log. } dn = 2.1560963$$
$$\text{und } dn = 143.25$$

2tens verhält sich nach Nro. 162.

$$1000^2 : 6745^2 = 9''.4237 : \tfrac{4}{7}\, Cd.$$

Es ist aber

$$\text{Log. } 9.4237 = 0.9742215$$
$$\text{Log. } 6745^2 = 7.6579640$$
$$\text{also Log } \tfrac{4}{7}\, Cd = 2.6321855$$
$$\tfrac{4}{7}\, Cd = 428''.73 = 5°.95$$

folglich Fig. 542. $Cc = +\ 149°.20$

und Fig. 543. $Cc = -\ 137.30.$

314. Weil der Halbmesser der Erde 3273822 Klafter beträgt; so wird ihr halber Umfang nach Nro. 16.

$$= 3.14 \times 3273822$$
$$= 10279801°$$

also ein Grad desselben

$$= \frac{10279801}{180} = 57110°$$

und eine Minute $= \frac{57110}{60} = 952°$

Dividirt man daher die Anzahl Klafter jeder horizontalen Entfernung A d durch 952; so erhält man die Anzahl Minuten des Bogens A C oder des Winkels A O C am Mittelpunkte der Erde.

Es ist aber, J. H. **Lamberts Bahn des Lichts durch die Luft**, die Strahlenbrechung n A c = $\frac{1}{14}$ A O C, und folglich der Winkel C A d = $\frac{7}{14}$ A O C, also C A d — n A c = $\frac{6}{14}$ A O C = $\frac{3}{7}$ A O C. Daher wird der Höhenwinkel

Fig.

Fig. 542. $+ CAc = + dAn + \frac{1}{7} AOC$,
und Fig. 543. $- CAc = - dAn + \frac{3}{7} AOC$.

Man erhält also 1tens jeden bejahenden oder verneinenden Höhenwinkel CAc über den wahren Horizonte des Punktes A, wenn man zu dem beobachteten scheinbaren $dAc = dAn$ noch $\frac{1}{7}$ des Winkels AOC am Mittelpunkte der Erde addirt, und sodann 2tens die wahre Höhe Cc des Punktes c über A, wenn man wegen des rechtwinklichten Dreyeckes cAC sagt: es verhält sich

Halbm. : AC = Tang. A : Cc.

Ist z. B. wieder $AC = 6745$ Klafter und der beobachtete Winkel $A = 1° 13'$,

so ist $AOC = \frac{6745}{952} = 7' 5''$.

$\frac{1}{7} AOC = 3' 2''$,

also Fig. 542. der Winkel $A = + 1° 16' 2''$,

folglich ist Log. Tang. A = 8.3447998
Log. AC = 3.8289820

also Log. Cc = 2.1737818
und Cc = 149.20

Fig. 543. wird der Winkel $A = - 1° 9' 58''$,

folglich Log. Tang. A = 8.3086758
Log. AC = 3.8289820

also Log. Cc = 2.1376578
und Cc = − 137.30

In beeden Fällen wie zuvor.

315. Ist die bejahende oder verneinende Höhe Cc des Punktes c über der Gesichtslinie einmal bekannt; so findet man die Höhe ebendieses Punktes c über dem Punkte A auf der Erde, wenn man in jedem Falle noch die Höhe der Gesichtslinie über A dazu addirt.

Ist z. B. diese Höhe 0°.66; so wird die Höhe des Punktes c über dem Punkte A auf der Erde

Fig. 542. = 149.86
und Fig. 543 = − 136.64.

316.

Fig. 537. 538. 316. Sucht man nun nach vorigem über A den Höhenunterscheid der Punkte C und A, und ebenso über B den Höhenunterscheid der Punkte C und B; so geben diese auch den Höhenunterscheid der Punkte A und B, und die Höhen dieser drey Punkte über dem Horizonte der Standlinie.

Ist z. B. die Höhe des Punktes C

über A = 149°.80 und

über B = 127°.46; so ist die Höhe des Punktes B über A = 22°.34. Folglich sind die Höhen ebendieser Punkte über dem Horizonte der Standlinie AB oder des ganzen Netzes folgende:

des Punktes A = — 11.17

des Punktes B = + 11.17

und des Punktes C = + 138.63.

Sucht man ferner über D die Höhenunterscheide der Gesichtslinie und der Punkte C, E, F; so findet man durch den ersten und die schon bekannte Höhe des Punktes C die Höhe der Gesichtslinie, und sodann durch diese und jene zween letztern Höhenunterscheide auch die Höhen der Punkte E, F über dem Horizonte des Netzes.

Ist z. B. der Höhenunterscheid der Gesichtslinie und des Punktes

C = + 231°.45

E = — 39°.45

F = + 289°.56;

so sind die Höhen über dem Horizonte des Netzes

der Gesichtslinie D = — 92°.82

des Punktes E = — 132°.27

des Punktes F = + 196°.74.

Ist D ein Standpunkt auf der Erde, so kann dessen Höhe über dem Horizonte des Netzes nach Nro. 315. bestimmet werden. Ist aber D eine Thurmspitze und das Instrument steht darneben auf der Erde; so kann man neben F durch E die Höhe der Gesichtslinie, und sodann durch diese die Höhe der Thurmspitze D wie zuvor bestimmen.

Ein=

Findet man z. B. neben F die Höhenunterscheide der Gesichtslinie und der Punkte

E = — 301.69

D = — 246.72

so ist die Höhe über dem Horizonte des Netzes

der Gesichtslinie F = + 169.42

der Thurmspitze D = — 77.30.

317. Beobachtet man nebst den horizontalen auch so viele vertikale Winkel, als zur Bestimmung der Höhen aller Punkte über dem Horizonte der Standlinie vonnöthen sind; so kann man diese Höhenwinkel in eine fünfte Reihe der Beobachtungstabelle Nro. 308. schreiben, und nachdem einmal die horizontalen Dreyecke berechnet sind, noch eine Nivellirtabelle von drey Reihen, wie folgt, verfertigen.

Trigonometrische Nivellirtabelle.

Stände des Instruments.	Höhen über der Gesichtslinie.	Höhen über dem Horizonte der Standlinie.
A.		— 11.17
B.		+ 11.17
	C. + 127.46	+ 138.63
D.	C. + 231.45	D. — 92.82
	E. — 39.45	— 132.27
	F. + 289.56	+ 196.74
F.	E. — 301.69	F. + 169.42
	D. — 246.72	— 77.30
&c.	&c.	&c.

Die Höhen der zwoten Reihe findet man nach Nro. 313. oder 314. bejahend oder verneinend, je nachdem die Höhenwinkel, durch welche sie berechnet werden, bejahend oder verneinend sind.

Die

Die Höhen der Gesichtslinien D, F der dritten Reihe werden gefunden, wenn man den Höhenunterscheid der Gesichtslinie und des schon vorher bestimmten Punktes, von der Höhe eben dieses Punktes über dem Horizonte der Standlinie abzieht. Und addirt man zu eben dieser Höhe der Gesichtslinie der dritten Reihe, die Höhe eines jeden folgenden Punktes in der zwoten Reihe über der Gesichtslinie; so erhält man die Höhe ebendieses Punktes für die dritte Reihe.

Von der Berichtigung der Eintheilung des vertikalen Randes.

Fig. 523. 536. 318. Stecket man 1tens über eine Anhöhe durch vertikale Stangen eine gerade Linie AB aus und bestimmet in ihrer Verlängerung auf der gegenüber liegenden niedrigern Anhöhe einen Punkt C, suchet 2tens vermittelst einer genau gemessenen Standlinie CD die horizontalen Entfernungen aller Stangen von dem Punkte C, Nivellirt 3tens die Linie AB und macht auf jeder Stange in bekannter Tiefe unter dem Vergleichungsplane XY einen Einschnicht E, stellet 4tens das Instrument über C und merkt den Durchschnitt F der horizontalen Gesichtslinie CF; so findet man durch FE und Eu auch die Tiefe Fu der horizontalen Gesichtslinie unter dem Vergleichungsplane XY: und zieht man die Tiefen aller Punkte E unter dem Vergleichungsplane von der Tiefe Fu der Gesichtslinie unter ebendemselben ab; so erhält man endlich die bejahenden und verneinenden Höhen aller Punkte E über der Gesichtslinie. Richtet man also 5tens den Zeiger des Fernrohres auf jeden Theilstrich des Randes mm und merkt den Durchschnitt G der Gesichtslinie; so findet man durch EG und Eg die Senkrechte Gg, und sodann

in

in dem rechtwinklichten Dreyecke G C g den wahren Werth des Winkels C, wenn man sagt: es verhält sich

Cg : Halbm. = G g : Tang. C.

Ist z. B. der Zeiger des Fernrohrs auf dem Theilstriche 4° über der Gesichtslinie, C g = 703,00 Schuh und G g = + 49.45 Schuh;

so wird die Summe = 11.6941453
Log. C g = 2.8469553

also Log. Tang. C = 8.8471900
und C = + 4° 1′ 24″.

Steht der Zeiger auf dem Theilstriche 3° 20 unter der Gesichtslinie, und es ist C g = 457′.32 und G g = − 26′.58; so wird

die Summe = 11.4244798
Log. C g = 2.6602200

also Log. Tang. C = 8.7642598
und C = − 3° 19′ 33″.

Steht der Zeiger auf dem Theilstriche 7° 0′ über der Gesichtslinie, und es ist C g = 801′.00 und G g = + 98′.82; so wird

die Summe = 11.9948415
Log. C g = 2.9036325

also Log. Tang. C = 9.0912090
und C = + 7° 1′ 58″.

Nachdem die wahren Werthe aller Theilstriche des Randes m m nach dieser Methode bestimmt sind, verfertiget man daraus, wie folgt, eine

Berichtigungstabelle der Eintheilung des vertikalen Randes.

Theilstriche des vertikalen Randes.	Ihre zugehörigen wahren Höhenwinkel.
unter Null	
0° 20′	0° 20′ 5″
0° 40′	0° 39′ 56″
1° 0′	1° 0′ 14″
&c.	&c.
3° 0′	3° 0′ 32″
&c.	&c.
5° 0′	4° 59′ 56″
über Null	Tiefenwinkel.
0° 20′	0° 19′ 56″
&c.	&c.
3° 0′	3° 0′ 38″
&c.	&c.
4° 0′	4° 1′ 24″
&c.	&c.
8° 0′	7° 59′ 46″
&c.	&c.
10° 0′	10° 0′ 14″
&c.	&c.
11° 0′	11° 0′ 48″

Hat man einmal die Berichtigung bis auf eine gewisse Erhöhung des Fernrohrs über den Horizont z. B. 7° fortgesetzet; so kann man den Zeiger des Fernrohres auf diesem

Theil.

Theilstriche befestigen, die eine aus den zwo vertikalen Schrauben x, x, welche in einer mit der Ebene des vertikalen Randes dem Auge nach gleichlaufenden Ebene liegen, lösen und die andere anziehen, so daß sich die Ebene des Quadranten unter den Horizont senket, bis die Gesichtslinie auf den Punkt F zeiget: sodann kann man ferner durch die zwo andern Schrauben x, x den vertikalen Rand so richten, daß die Gesichtslinie des Fernrohres wieder in jeder Stelle des vertikalen Randes genau auf die Linie A B zeiget: trifft beydes ein; so findet man den wahren Werth eines jeden höhern Theilstriches, wenn man den Zeiger des Fernrohres bis auf denselben erhöht, und den durch die Tangente G g gefundenen Höhenwinkel zu dem wahren Werthe des Theilstriches des 7ten Grades addirt.

Nimmt man die horizontalen Entfernungen der Stangen von dem Punkte C größer, z. B. über 500 Klafter an; so läßt sich die Strahlenbrechung und der Höhenunterscheid des scheinbaren und wahren Horizontes nicht mehr vernachläßigen. In diesem Falle muß man zu F u noch die Erhöhung des im scheinbaren Horizonte gesehenen Punktes über dem wahren Horizonte für die Entfernung C F addiren: sodann von jeder durch diese vergrösserte Tiefe F u wie oben bestimmten bejahenden oder verneinenden Höhe g G wieder ebenjene Erhöhung für die Entfernung C g abziehen, und übrigens ganz wie zuvor verfahren.

Von der Berichtigung der Eintheilung des vertikalen Verniers.

319. Richtet man den Zeiger auf jeden Theilstrich des Randes, der von dem niedrigsten wenigstens um 7° absteht, z. B. auf den Theilstrich 8° ober der horizontalen Gesichtslinie, und sucht den wahren Werth für diesen Theilstrich; so findet man die wahren Werthe aller Theilstriche des Verniers, wenn man einen nach dem andern Fig. 536.

auf

auf ebenjenen Theilstrich des 8ten Grades richtet, und den durch die Tangente Gg jedesmal gefundenen Tiefenwinkel von dem wahren Werthe des 8ten Grades abzieht.

Ist z. B. der wahre Werth des 8ten Grades $= 7° 59' 46''$ und man findet, da der 5te Theilstrich des Verniers auf dem 8ten Grade des Randes steht, durch die Tangente Gg den Tiefenwinkel $= 6° 14' 10''$ so wird der wahre Werth des 5ten Theilstreichs des Verniers $= 1° 45' 36''$.

Steht der 18te Theilstrich des Verniers auf dem 8ten Grade, und man erhält durch die Tangente Gg den Tiefenwinkel $= 1° 42' 18''$, so giebt dieser von $7° 59' 46''$ abgezogen $6° 17' 28''$ für den wahren Werth des 18ten Theilstrichs des Verniers.

Die Berichtigungstabelle des vertikalen Verniers wird jener des horizontalen Nro. 303. ähnlich.

320. Weil die Eintheilung des Randes von Null auf und aufwärts, jene des Verniers aber nur aufwärts geht, so erhält man jeden beobachteten Winkel, da ein Theilstrichs des Verniers mit einem des Randes oder Null übereintrift, wenn man den wahren Werth des Theilstrichs des Randes, von den wahren Werthe des mit ihm übereinkommenden Theilstrich des Verniers abzieht: ist der Unterscheid bejahend, so giebt es einen Höhenwinkel, ist aber dieser Unterscheid verneinend, einen Tiefenwinkel. Trift endlich ein Theilstrich des Verniers mit einem des Randes unter Null überein, so bekömmt man den Höhenwinkel, wenn man aufden Rand von Null bis zu jenen Theilstrich des Verniers der mit einem des Randes übereinkömmt zählt, und noch die Theile des Verniers bis zum Zeiger dazu addirt.

Kömmt z. B. der 5te Theilstrich des Verniers mit dem Theilstrich 4° des Randes, über Null überein, so

wird

wird der beobachtete Winkel = 1° 45′ 36″ — 4° 1′ 24″ = — °2 15′ 48″, ein Tiefenwinkel, steht der 18te Theilstrich des Verniers auf 3° des Randes über Null, so wird der beobachtete Winkel = 6° 17′ 28″ — 3° 0′ 38″ = + 3° 16′ 50″ ein Höhenwinkel. Kömmt endlich der 5te Theilstrich des Verniers mit 1° des Randes unter Null überein, so wird der beobachtete Winkel = 1° 0′ 14″ + 1° 45′ 36″ = + 2° 45′ 50″ ein Höhenwinkel.

321. Wird das obere Fernrohr anstatt des Verniers mit einer Migrometerschraube oder lieber anstatt des Verniers, welcher die Minuten giebt, mit einem, welcher die Winkel nur zu 5 Minuten giebt, und zugleich mit einer Migrometerschraube verbunden; so darf man die Berichtigung der Eintheilung lange nicht so weit in die Höhe fortsetzen.

322. Bringt man hart unter dem Kreuze xxxx an der vertikalen Hilse einen horizontalen mit männlichen Schraubengängen versehenen Zapfen so an, daß sich eine horizontale Hilse auf demselben fest anschrauben läßt; so kann man vermittelst dieser Hilse den Quadranten auf einem Gestelle Q Fig. 402. über A aufstellen, und, nachdem der Zeiger des obern Fernrohres auf dem niedrigsten Theilstriche 5° des vertikalen Randes befestiget, und die Gesichtslinie nach der Stange C gerichtet ist, die Ebene des Quadranten durch die Schrauben x, x, x, x, vermittelst eines Perpendikels genau in die vertikale Lage bringen, also die Berichtigung der Eintheilung des vertikalen Randes sowohl als des Verniers nach Nro. 302. und 303. bewerkstelligen.

Fig. 523. 527.

323. Wegen der größern Zusammensetzung des Instruments, welche diese Berichtigungsmethode erfordert, und vielmehr wegen des Zwanges, welchen die wesentlichen Theile des Instruments bey dieser Stellung leiden, ziehe ich jene erstere Berichtigungsmethode, ungeachtet sie

mühsamer ist, dieser letztern vor. Wenigstens soll man die Berichtigung der Lage des vertikalen Randes, welche der Druck des Fernrohres während der Berichtigung der Eintheilung nach der letztern Methode abändern könnte, erst nachgehends vornehmen.

Von dem Gebrauche des trigonometrischen Nivellirens.

324. Weil alle Dreyecke des berechneten Netzes allemal in dem Horizonte der Standlinie liegen; so kann man zwar das Nivelliren unterlassen, so oft man eine ganze Karte durch eine und dieselbe Standlinie bestimmet: nimmt man aber eine Karte durch zwo verschiedene in verschiedenen Höhen gemessene Standlinie auf; so muß man wenigstens von jeder Standlinie an bis auf einen beyden Netzen gemeinen Punkt nivelliren, damit man durch den Höhenunterscheid der Horizonte beeder Standlinien die Größe der einen in dem Horizonte der andern finden, und beyde Netze in einem und demselben Horizonte berechnen kann.

Obige Beyspiele Nro. 310. 311. von der Erhöhung oder Vertiefung des Horizontes der Standlinie zeigen zur Genüge, in welchen Fällen der Höhenunterscheid der Horizonte beeder Standlinien einen merklichen Irrthum verursachen kann.

Uebrigens ist es schon für sich selbst eine wesentliche Sache, daß man die verschiedenen Höhen eines Landes kenne, und es gehört zur Vollkommenheit einer trigonometrischen Aufnahme, daß man dadurch jeder Linie Größe nicht nur für den Horizont der Standlinie angeben, sondern auch, im Falle es verlangt wird, für ihren eigenen Horizont genau berechnen könne. Deßwegen soll man sich der geringen Mühe und kurzen Zeit, welche die Bestimmung der Höhen bey einer trigonometrischen

Auf-

Aufnahme erfordert, nie reuen lassen: besonders, wenn man nach dem Nro. 291. gemachten Vorschlage das berechnete Netz sowohl, als die auf der Oberfläche der Erde angenommenen Punkte für allzeit bewahren will.

Von der Methode die Lage des trigonometrischen Netzes nach der Mittagslinie zu bestimmen.

325. Ist c der gemeinschäftliche Mittelpunkt der Halbkreise aba und ABA', der Durchmesser AA' senkrecht auf BB', die Bögen BD, BE, bd, be, AF, A'G, af, ag = 23° 28', und man drehet die beeden Halbkreise um den Durchmesser A'A; so stellet die von dem halben Umfange ABA' beschriebene Kugelfläche den Sternhimmel, und die von dem Halbkreise aba beschriebene Kugel die Erde vor. Fig. 544.

Der Durchmesser AA', um welchen sich der Sternhimmel oder die Erdkugel drehet, wird die **Weltachse** und der Durchmesser aa die **Erdachse** genennt: die Endepunkte A, A', a, a, derselben heissen **Pole**.

Die Punkte B, D, E, F, G, b, d, e, f, g, beschreib'n Umfänge auf die Weltachse senkrechter Kreise; diese heissen BB, bb **Aequator**, DD, EE, dd, ee, **Wendekreise**, und FF, GG, ff, gg **Polarkreise**.

Richtet man seine rechte Seite gegen die Sonne, sobald man sie in der Frühe erblicken kann; so heißt die Weltgegend rechts B **Aufgang** oder **Ost**, links B' **Untergang** oder **West**, vorwärts A **Mitternacht** oder **Nord**, und rückwärts A' **Mittag** oder **Sud**. Ebendaher wird auch der Pol A **Nordpol** und A' **Südpol** genennt.

326. Verlängert man die Vertikallinie cn eines jeden Punktes n beederseits bis an den Sternhimmel; so heißt das obere End x **Zenit**, das untere y **Nadir**, und der auf die Vertikallinie senkrechte Kreis P Q, p q, welcher durch den Mittelpunkt der Erde geht, der **Horizont** des Punktes n. Bey jeder Bewegung des Punktes n gegen was immer für eine Weltgegend bewegt sich auch seine Vertikallinie, sein Zenit, Nadir und Horizont. Dieser Horizont muß nicht mit jenem, wovon beym Nivelliren die Rede war, verwechselt werden.

Aus jedem Punkte n der Oberfläche der Erde entdecket man nur die halbe Himmelskugel, welche über dem Horizonte P Q ebendieses Punktes liegt. Daher wird in jedem Punkte n der nördlichen Halbkugel von dem südlichen Wendekreise E E' nur der kleinere Theil E r, vom nördlichen D D' aber der größere D S, und von dem Aequator B B' überall die Hälfte gesehen.

327. Jeder Kreis durch die Vertikallinie x y heißt **Vertikalkreis**, und jener, welcher zugleich auch durch die Achse geht, wird des Punktes n **Mittagskreis** genennt.

Der Mittagskreis eines jeden Punktes n ist also auf den Horizont P Q, auf den Aequator B B' und auf jeden mit einem aus diesen zween Kreisen gleichlaufenden Kreis senkrecht. Er bewegt sich, so oft der Punkt n weiter gegen Osten oder Westen rücket.

Nimmt man den Mittagskreis eines gewissen Punktes auf der Erde als den ersten an; so heißt der Bogen des Aequators, den man von dem ersten Mittagskreise an gegen Osten bis zu dem Mittagskreise eines jeden Punktes n zählet, die **Länge** ebendieses Punktes n.

Die **Breite** eines Punktes n aber ist nichts anders, als der Bogen B x des Mittagskreises, welcher zwischen dem Aequator und der Vertikallinie begriffen ist. Diese ist nördlich oder südlich nach dem der Punkte n zwischen dem Aequator und dem Nordpol oder Südpole liegt. Ist die

Rede

Rede von einem Punkte x am Himmel; so heißt die Breite Bx **Abweichung** oder **Declination**.

328. Der Durchschnitt des Mittagskreises mit einer durch n geführten horizontalen Ebene wird des Punktes n Mittagslinie genennt.

Ist adb mit dem Horizonte, und aeb mit dem Aequator gleichlaufend; so ist der Mittagskreis dxf auf die Ebenen dieser Bögen, also auch auf ihren gemeinschäftlichen Durchschnitt ab senkrecht. Folglich halbirt die Mittagslinie nd den horizontalen Winkel anb, oder der Mittagskreis den Winkel, welchen die zwo durch a und b geführten vertikalen Ebenen xna und xnb in ihrem Durchschnitte nx machen. Fig. 545.

Ist der Bogen adb höher als der Horizont ADB des Punktes N; so bleiben die Winkel, welche die durch a und b geführten vertikalen Ebenen mit dem Mittagskreise machen, dieselben; folglich theilt wieder die Mittagslinie ND den Winkel der durch a und b geführten vertikalen Ebenen in zwey gleiche.

329. Sieht man die Erde als unbeweglich an; so dreht sich der ganze Sternhimmel alle 24 Stunden von Aufgang gegen Untergang um die Weltachse. Die Kreise, welche die Himmelskörper vermöge dieser Bewegung beschreiben, heißen **Tagekreise**. Fig. 544.

Nebst dieser allgemeinen Bewegung hat die Sonne an dem Himmel noch eine besondere, vermöge welcher sie von Untergang gegen Aufgang jährlich einen Kreis DE' (**Ekliptik oder Sonnenbahn**) der mit dem Aequator einen Winkel von 23° 28' macht, beschreibt.

In dieser Bahn steigt sie innerhalb 6 Monate von dem südlichen Wendekreise EE' bis zu den nördlicher DD' herauf, sodann wieder in gleicher Zeit von diesem bis zu jenem hinab, so daß sie sich um den 21ten December im südlichen Wendekreise, um den 21ten März im Aequator, um den 21ten Junius im nördlichen Wendekreise, und

um

um den 21ten September wieder in dem Aequator befindet.

Betrachtet man die Bewegung der Sonne, wie sie uns ohne auf den Sternhimmel acht zu geben, in die Sinne fällt; so beschreibt sie durch ihre tägliche Bewegung von Aufgang gegen Untergang eine Schraubengängen ähnliche Bahn, welche sich die ersten 6 Monate von dem südlichen Wendekreise bis zu dem nördlichen, und die zweyten 6 Monate wieder von diesem bis zu jenem erstrecket.

Fig. 545. 523. 330. Sind m, n, und r Punkte des trigonometrischen Netzes, der Quadrant früh morgens über n nach m gestellt, das obere Fernrohr in einer beliebigen Erhöhung an dem vertikalen Rande befestiget nnd nach Aufgang gerichtet; so kann man vermittelst eines gefärbten oder mit Tusch fein überzogenen Glases, welches man an das Fernrohr befestiget, nach der Sonne sehen, sobald ihr oberer Rand im Fernrohre erscheint, das Schräubchen p anziehen und durch die Schraube e ihr mit dem Fernrohre solange folgen, bis das Fadenkreuz ihr Bild in vier gleiche Theile schneidet, und so den horizontalen Winkel, zwischen dem Punkte m und der in angenommener Höhe über dem Horizonte erscheinenden Sonne messen.

Ist a der Punkt, in welchem man die Sonne beobachtet hat, der Bogen adb mit dem Horizonte, und aeb mit dem Aequator gleichlaufend; so wird die Sonne beynahe dem Bogen aeb folgen, und die Ebene xnb um den Unterscheid ihrer Abweichungen vom Aequator, während sie von a nach b geht, höher oder tiefer als der Punkt b ist, schneiden, je nachdem sie sich vom südlichen Wendekreise gegen dem nördlichen im Aufsteigen oder von diesem gegen jenem im Absteigen befindet.

Die Abweichung der Sonne von dem Aequator findet man für jeden Mittag im Jahre in den astronomischen Kalendern ausgesetzet; und sagt man: es verhält sich 48 zu dem Unterscheid der Abweichungen für den der Beobachtung vorhergehenden und folgenden Tag, wie die doppelte Anzahl der Stunden von der Zeit der Beobachtung

der

der Sonne in a bis Mittag zu x; so findet man durch diese Proportion auch x, den Unterscheid der Abweichungen der Sonne für die Zeiten, da sie sich in den Ebenen xna und xnb befindet.

Stellet man also nachmittags den Quadranten über n nach r, befestiget das Fernrohr an dem vertikalen Rande, je nachdem die Sonne im Auf-oder Absteigen ist, um den durch vorige Proportion gefundenen Unterscheid der Abweichungen höher oder tiefer, als es vormittags gestanden. ist, und beobachtet den horizontalen Winkel rnb zwischen dem Punkte r und der in dem Fernrohre erscheinenden Sonne; so geben 1tens die Winkel mnr und rnb den Winkel mnb, sodann 2tens die Winkel mnb und mna den Winkel anb, endlich 3tens die Winkel $\frac{anb}{2} = dna$, und mna den Winkel mnd, den die Mittagslinie nd mit einer Seite nm des Netzes macht.

331. Suchet man nach dieser Methode bey einer trigonometrischen Aufnahme gleich anfänglich den Winkel der Mittagslinie mit einer Seite des Netzes: und berechnet nach Nro. 285. 2c. die Senkrechten aller aufgenommenen Punkte auf eben diese Mittagslinie; so wird dadurch auch die Lage des Netzes gegen die vier Weltgegenden bestimmt. Auf der Karte selbst wird insgemein die Mittagslinie durch eine seitwärts gezeichnete Magnetnadel, welche gegen Norden weiset, angezeiget.

Von dem Winkelmesser, dessen Fernrohre keine vertikale Bewegung haben.

332. Ist das obere Fernrohr des Winkelmessers in einer mit der Ebene des Randes gleichlaufenden unveränderlichen Lage an dem Lineale, das untere Fernrohr aber ebenso an dem Rande befestiget; so muß der Rand desselben sich nicht nur in jeder auf den Horizont schiefen Ebene fest stellen, sondern auch genau in die vertikale Ebene nach jedem Gegenstande richten lassen. Denn so oft ein Winkel mit

einem

einem solchen Instrumente beobachtet werden soll; so muß man es in die Ebene des auf dem Horizont schiefen Dreyeckes bringen, und nebst dem Winkel des schiefen Dreyeckes noch die zween Höhen- oder Tiefenwinkel beeder Gegenstände messen, sodann erst aus diesen drey beobachteten Winkeln den horizontalen berechnen. Ungeachtet dieses Instrument für eine trigonometrische Aufnahme dem Nro. 292. ꝛc. beschriebenen weit nachzusetzen ist, so wird man doch sowohl seinen Bau als die Methode aus den beobachteten schiefliegenden und vertikalen Winkeln den horizontalen zu berechnen nach abgehandelter sphärischen Trigonometrie vornehmen.

Ende des zweyten Theiles.